МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.03.003>
УДК 517.9;519.85

А.Ф. Верлань, д-р техн. наук, **Ю.О. Фуртат**, канд. техн. наук
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАНУ
(Україна, 03164, Київ, вул. Генерала Наумова, 15,
e-mail: a.f.verlan@gmail.com; saodhar@ipme.kiev.ua)

Наближені динамічні моделі нестационарних вимірювальних перетворювачів

Розглянуто методи отримання наближених залежностей для опису процесів у вимірювальних перетворювачах (ВП) шляхом перетворення до вигляду, який дозволяє застосовувати наближені аналітичні розв'язки або ефективні чисельні методи. Для дослідження процесів вимірювання за допомогою метаматематичного опису використовується прикладний інженерний аналіз на основі аналітичних наближених залежностей, які дають змогу якісно і кількісно оцінити вплив фізичних параметрів. Труднощі моделювання динамічних властивостей нестационарних ВП зі змінними параметрами полягають у тому, що не існує точних аналітичних методів розв'язання рівнянь, які описують поведінку динамічних об'єктів цього класу.

К л ю ч о в і с л о в а: наближений аналіз, вимірювальний перетворювач, динамічна модель, інтегральне рівняння.

Наявність аналітичних наближених залежностей, які дають змогу якісно і кількісно оцінити вплив фізичних параметрів [1, 2], необхідна для вирішення задачі проектування вимірювальних перетворювачів (ВП), а також під час експлуатації, тобто на всіх етапах їх життєвого циклу. Як приклад розглянемо ВП температури з зосередженими параметрами першого порядку, тобто ВП, динамічні властивості якого описуються рівнянням

$$y'(t) + \frac{1}{T} y(t) = \frac{1}{T} x(t),$$

Єдиним параметром, що визначає динамічні властивості цього перетворювача, є стала часу T , пов'язана з фізичними параметрами співвідношенням $T = c\gamma_0 L_0 / \alpha_k$, де c і γ_0 — питома теплоємність і щільність мате-

© Верлань А.Ф., Фуртат Ю.О., 2020

ріалу термоприймача; L_0 — визначальний розмір термоприймача (наприклад, для циліндричного термоприймача це половина радіусу); α_k — коефіцієнт конвективного теплообміну, який характеризує інтенсивність передачі теплової енергії від середовища (газу або рідини) до термоприймача, якщо температура середовища вище температури термоприймача, а також від термоприймача до середовища, якщо температура останнього нижче температури термоприймача. Отже, існує істотна і конструктивна залежність параметра T математичної моделі ВП від його фізичних властивостей.

Розглянемо співвідношення для сталої часу психрометра

$$\lambda_{\Gamma} = T \frac{A_0 P_0}{k E_M + A P_0},$$

де T — стала часу термометра; E_M — середнє значення пружності насиченої пари за температури мокрого термометра; A_0 — психрометричний коефіцієнт; P_0 — тиск газу; k — постійна у рівнянні Клаузіуса—Клайперона. Величина параметра λ_{Γ} визначається складною залежністю від швидкості газу і відносної вологості.

Можливості отримання точних аналітичних методів розв'язання рівнянь, що описують поведінку динамічних властивостей нестационарних ВП, суттєво обмежені, за винятком ВП першого порядку, а також деяких ВП інших типів, у яких нестационарність має специфічний характер. Тому основою дослідження нестационарних ВП практично завжди є наближені і чисельні методи розв'язання різних класів рівнянь.

Безсумнівний науковий інтерес викликає задача створення методів аналізу стаціонарних і нестационарних ВП за допомогою перетворення вихідних диференціальних рівнянь до вигляду, який дає змогу застосовувати наближені аналітичні розв'язки або ефективні чисельні методи.

Слід зауважити, що інтегральні динамічні моделі [3], будучи непараметричними, у багатьох випадках дають можливість підвищити ефективність моделювання ВП, однак для багатьох задач також необхідно, щоб ядра інтегральних рівнянь мали аналітичні представлення з відображенням фізичних параметрів.

Розглянемо деякі методи перетворення і отримання наближених залежностей для процесів у ВП.

Ітераційний метод. Досить зручна модифікація методу послідовних наближень для аналізу моделі має вигляд $A[y(t)] = x(t)$, де

$$A[y(t)] = \sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(n-i)}, \quad a_0 = 1,$$

за початкових умов

$$y^{(i)}(t) \Big|_{t=0} = y_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Тут $y(t)$ — показники ВП; $x(t)$ — вимірювана характеристика досліджуваного процесу.

Вираз для реакції ВП будемо шукати у вигляді

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(t). \quad (2)$$

Перший член ряду (2) є розв'язком рівняння

$$\bar{A}[y_0(t)] = x(t) \quad (3)$$

за початкових умов (1). Оператор $\bar{A}$ має вигляд

$$\bar{A} = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i(t) p^{(n-i)}, \quad \bar{a}_0 = 1, \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Коефіцієнти оператора $\bar{A}$ необхідно вибирати, дотримуючись таких умов: рівняння (3) повинно мати простий розв'язок, бажано, щоб різниця коефіцієнтів $a_i(t)$ і $\bar{a}_i(t)$ була за можливості найменшою. Усі наступні члени ряду, починаючи з другого, визначаються з ітераційного співвідношення

$$\bar{A}[y_{m+1}(t)] = (\bar{A} - A)[y_m(t)], \quad m = 0, 1, \dots$$

за нульових початкових умов.

Стосовно вибору коефіцієнтів $\bar{a}_i(t)$ є такі рекомендації. Якщо $a_i(t)$ є періодичними функціями часу з періодом T_i , то за коефіцієнти $\bar{a}_i(t)$ мож-

на взяти $\bar{a}_i(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} a_i(t) dt$. Якщо коефіцієнти $a_i(t)$ є функціями, що по-

вільно змінюються, то за коефіцієнти $\bar{a}_i(t)$ необхідно взяти постійні величини, рівні в певному сенсі середнім значенням коефіцієнтів $a_i(t)$. Якщо коефіцієнти $a_i(t)$ — стаціонарні випадкові функції, то за коефіцієнти $\bar{a}_i(t)$ доцільно взяти математичні очікування коефіцієнтів $a_i(t)$ [4].

З формули (2) випливає, що k -е наближення шуканого розв'язку визначається за формулою

$$y^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k y_i(t).$$

Як бачимо, метод досить зручний, особливо для тих задач, де можна обійтися другим або третім наближенням, тобто значення k — невелике.

Зведення до граничної задачі і інтегрального рівняння. Задачу аналізу ВП другого порядку можна звести до граничної задачі для звичайного диференціального рівняння з однорідними граничними умовами [5]. Нехай потрібно отримати розв'язок рівняння

$$a(t) y'' + b(t) y' + c(t) y = \varphi(t) \quad (4)$$

з початковими умовами

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (5)$$

Для переходу від початкових умов (5) до однорідних граничних необхідно зробити заміну шуканої функції $y(t)$. Однією з таких заміни може бути наступна:

$$z(t) = y(t) - \frac{t^2}{2T} y'(T) - y_0 \cos\left(\frac{\pi}{T} t\right), \quad (6)$$

де T — тривалість процесу вимірювання. У (6) входить значення похідної шуканої функції в момент $t = T$. Величина $y'(t)$ зазвичай може бути визначено за результатами вимірювань. У результаті заміни (6) рівняння (4) перетворюється на наступне:

$$a(t) z''(t) + b(t) z'(t) + c(t) z(t) = \psi(t), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \varphi(t) - a(t) \left[\frac{1}{T} y'(T) - y_0 \frac{\pi^2}{T^2} \cos\left(\frac{\pi}{T} t\right) \right] - \\ & - b(t) \left[\frac{1}{T} y'(T) - y_0 \frac{\pi}{T} \sin\left(\frac{\pi}{T} t\right) \right] - c(t) \left[\frac{t^2}{2T} y'(T) + y_0 \cos\left(\frac{\pi}{T} t\right) \right] \end{aligned}$$

за граничних умов

$$z(0) = 0, \quad z'(T) = 0. \quad (8)$$

Тепер можна перейти до методу, суть якого полягає у зведенні диференціального рівняння (7) до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Помножимо обидві частини рівняння (7) на

$$d(t) = \frac{1}{a(t)} \exp \int_0^t \frac{b(t)}{a(t)} dt$$

і зведемо (7) до самоспряженої форми:

$$\frac{d}{dt} \left[\varepsilon(t) \frac{dz(t)}{dt} \right] = -c(t) d(t) z(t) + \psi(t) d(t), \quad (9)$$

де

$$\varepsilon(t) = \exp \int_0^t \frac{b(t)}{a(t)} dt.$$

Розв'язок рівняння (9) з граничними умовами (8) еквівалентний розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$z(t) = \int_0^T G_0(t, \tau) c(\tau) d(\tau) z(\tau) d\tau + f(t), \quad (10)$$

де

$$f(t) = - \int_0^T G_0(t, \tau) \psi(\tau) d(\tau) d\tau;$$

$G_0(t, \tau)$ — функція Гріна оператора $\frac{d}{dt} \left[\varepsilon(t) \frac{d}{dt} \right]$ за граничних умов (8).

Як бачимо, ядром інтегрального рівняння (10) є функція $G(t, \tau) = G_0(t, \tau) c(\tau) d(\tau)$.

Припустимо, що це ядро представлено у вигляді сепарабельного ядра одним з можливих способів [6], тобто у вигляді

$$G(t, \tau) = \sum_{i=1}^p \sigma_i(t) \eta_i(\tau). \quad (11)$$

У такому вигляді розв'язання інтегрального рівняння (10) зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь. Дійсно, підставивши праву частину (11) в рівняння (10), отримаємо

$$z(t) = \int_0^T \sum_{i=1}^p \sigma_i(t) \eta_i(\tau) z(\tau) d\tau + f(t).$$

Ввівши позначення

$$z_i = \int_0^T \eta_i(\tau) z(\tau) d\tau, \quad (12)$$

отримаємо

$$z(t) = \sum_{k=1}^p z_k \sigma_k(t) + f(t). \quad (13)$$

Тепер підставимо (13) в (12) та отримаємо

$$z_i - \sum_{k=1}^p \beta_{ik} z_k = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (14)$$

де

$$\beta_{ik} = \int_0^T \eta_i(\tau) \sigma_k(\tau) d\tau; \quad f_i = \int_0^T \eta_i(\tau) f(\tau) d\tau, \quad i, k = 1, 2, \dots, p.$$

Таким чином, розв'язання інтегрального рівняння (10) звелось до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (14).

Незважаючи на те, що метод зведення до інтегрального рівняння було застосовано до перетворювача другого порядку, можливості цього методу значно ширші [7]. Так, наприклад, якщо ВП описано системою $2n$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (це досить широкий клас ВП, оскільки до таких систем може бути зведено багато інших видів рівнянь), то подібна система може бути зведена до лінійної системи n диференціальних рівнянь другого порядку.

Нехай лінійна система диференціальних рівнянь другого порядку має вигляд

$$\begin{aligned} a_k(t) y_k''(t) + b_k(t) y_k'(t) + c_k(t) y_k(t) = \\ = \varphi_k[t, x(t)] + \lambda_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (15)$$

де функція φ_k містить вимірювану характеристику $x(t)$ і параметри системи, а $\lambda_k(t)$ — функції, що містять, крім відомих параметрів, всі невідомі $y_i(t)$, крім $i = k$. Так само, як у попередньому випадку, рівняння системи (15) з початковими умовами можна звести заміною шуканих змінних до граничних задач із однорідними граничними умовами, а потім перейти до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, які в цьому випадку набувають вигляду

$$z_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau) d\tau + f_k(t), \quad (16)$$

де $G(t, \tau)$ — функція Гріна оператора $\frac{d}{dt} \left[\varepsilon(t) \frac{d}{dt} \right]$; $\varepsilon(t) = \exp \int \frac{b(t)}{a(t)} dt$,

за граничних умов $z_k(0) = 0$, $z_k'(T) = 0$;

$$F(t) = c(t) d(t) z(t) - \lambda(t) d(t); \quad d_k(t) = \frac{1}{a_k(t)} \exp \int_0^t \frac{b_k(t)}{a_k(t)} dt;$$

вільний член $f_k(t)$ визначається так:

$$f_k(t) = - \int_0^T G_k(t, \tau) \psi_k[\tau, X(\tau)] d_k(\tau) d\tau.$$

Тут ψ_k пов'язані так само, як функція ψ з φ у попередньому випадку.

Тепер, замінюючи ядра $G_k(t, \tau)$ сепарабельними,

$$G_k(t, \tau) = \sum_{i=1}^p \sigma_{i,k}(t) \eta_{i,k}(\tau),$$

і вводячи позначення

$$z_{i,k} = \int_0^T \eta_{i,k}(\tau) F_k(\tau) d\tau,$$

зводимо розв'язання кожного інтегрального рівняння до розв'язання відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянуті ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$G_k(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^t \varepsilon_k(t) dt, & t \leq \tau, \\ \int_0^\tau \varepsilon_k(\tau) d\tau, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Таким чином, викладений метод є досить загальним, і його практичне використання не пов'язане з будь-якими принциповими труднощами. Водночас, необхідно зазначити, що цей метод спирається на той факт, що вихідне диференціальне рівняння з початковими умовами попередньо замінюється рівнянням з граничними умовами.

Слід зазначити, що аналіз динамічних властивостей нестационарних ВП доцільний також через перехід від відповідних диференціальних рівнянь до інтегральних рівнянь Вольтерри [4].

Застосування методу Бубнова–Гальоркіна. Перетворення вихідної задачі у граничну дає змогу застосувати метод Бубнова–Гальоркіна як один з найбільш універсальних методів. При цьому гранична задача (8), (9) має вигляд

$$a(t) z''(t) + b(t) z'(t) + c(t) z(t) - \psi(t) = 0, \quad (17)$$

$$z(0) = 0, \quad z'(T) = 0. \quad (18)$$

Відповідно до цього методу розв'язок рівняння (17) за граничних умов (18) має вигляд

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(t), \quad (19)$$

де координатна система $\{\phi_k(t)\}$ являє собою повну систему лінійно-незалежних функцій, що задовольняють граничні умови (18); a_k — постійні

величини, що підлягають визначенню, визначаються за такої умови: ліва частина вихідного рівняння стала після підстановки в неї функції $z_n(t)$ замість функції $z(t)$, ортогональної до системи $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Підставивши праву частину (19) в рівняння (17), отримаємо

$$\sum_{k=1}^n a_k (L\varphi_k, \varphi_m) = (\psi, \varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

де

$$L = a(t) \frac{d^2}{dt^2} + b(t) \frac{d}{dt} + c(t); (\varphi_k, \varphi_m) = \int_0^T \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt.$$

Як впливає з (20), для визначення постійних величин a_k отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши цю систему і підставивши отриманий результат у (19), знайдемо шуканий розв'язок рівняння (17) з граничними умовами (18).

Висновки

Розглянуті методи ґрунтуються на способах наближеного перетворення традиційних динамічних моделей, що дозволяє спростити задачу отримання співвідношень для якісного або чисельного аналізу процесів у нестационарних ВП.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабак В.П., Бабак С.В., Еременко В.С. Теоретические основы информационно-измерительных систем. Учебник. Киев: ООО «София-А», 2014.
2. Ripka P., Tipek A. Modern sensors: handbook. Chichester: Jon Wiley&Sons, 2010.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. К.: Наук. думка, 1986, 544 с.
4. Федорчук В.А., Дячук О.А. Еквівалентування математичних моделей динамічних систем//Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки, 2009, вип. 2, с. 155—164.
5. Kress R., Ripka P., Tipek A. Linear integral equations. 3rd ed. New York, USA: Springer, 2014.
6. Верлань Д.А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей// Электрон. моделирование, 2014, **36**, № 3, с. 41—57.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5-ти томах. М.: Физматгиз, 1959, 659 с.

Отримано 27.04.20

REFERENCES

1. Babak, V.P., Babak, S.V. and Yeremenko, V.S. (2014), *Teoreticheskiye osnovy informatsionno-izmeritel'nykh sistem* [Theoretical foundations of information-measuring systems], Kiev, Ukraine.
2. Ripka, P. and Tipek, A. (2010), *Modern sensors: handbook*, Chichester: Jon Wiley&Sons.
3. Verlan', A.F. and Sizikov, V.S. (1986), *Integral'nyye uravneniya: metody, algoritmy, programmy: Spravochnoye posobiye* [Integral equations: methods, algorithms, programs: Reference book], Nauk. dumka.
4. Fedorchuk V.A. and Dyachuk, O.A. (2009), *Ekvivalentnyy matematiceskyy model dynamicheskoy sistema* [Equivalence of mathematical models of dynamical systems], *Matematychni ta komp'yuterni modelyuvannya. Seriya: Tekhnichni nauky*, Vol. 2, pp. 155-164.
5. Kress, R. (2014), *Linear integral equations*, 3rd ed., Springer, New York, USA.
6. Verlan', D.A. (2014), *Metod vyrozhdennykh yader pri chislennoy realizatsii integral'nykh dinamicheskikh modeley* [The method of degenerate kernels in the numerical implementation of integral dynamic models], *Elektron. modelirovaniye*, Vol. 36, no. 3, pp. 41-57.
7. Smirnov, V.I. (1959), *Kurs vysshey matematiki. V 5-ti tomakh*. [The course of higher mathematics in 5 volumes], Fizmatgiz, Moscow.

Received 27.04.20

А.Ф. Верлань, Ю.О. Фуртат

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Рассмотрены методы получения приближенных зависимостей для описания процессов в измерительных преобразователях (ИП) путем преобразования к виду, который позволяет применять приближенные аналитические решения или эффективные численные методы. Для исследования процессов измерения с помощью метаматематических описаний используется прикладной инженерный анализ на основе аналитических приближенных зависимостей, которые позволяют качественно и количественно оценивать влияние физических параметров. Трудности моделирования динамических свойств нестационарных ИП с переменными параметрами состоят в том, что не существует точных аналитических методов решения уравнений, описывающих поведение динамических объектов этого класса.

К л ю ч е в ы е с л о в а: приближенный анализ, измерительный преобразователь, динамическая модель, интегральное уравнение.

A.F. Verlan Yu.O. Furtat

APPROXIMATE DYNAMIC MODELS OF NON-STATIONARY MEASURING TRANSDUCERS

Methods for obtaining approximate dependencies for describing processes in measuring transducers (MTs) by converting to a form that allows the use of approximate analytical solutions or effective numerical methods are considered. To study the measurement processes using metamathematical descriptions, applied engineering analysis is used based on approximate analytical dependencies that allow qualitative and quantitative assessment of the influence of physical

parameters. The difficulties in modeling the dynamic properties of non-stationary PIs with variable parameters are that there are no exact analytical methods for solving equations that describe the behavior of dynamic objects of this class.

Keywords: approximate analysis, measuring transducer, dynamic model, integral equation.

ВЕРЛАНЬ Анатолій Федорович, д-р техн. наук, професор, гол. наук. співр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. В 1956 р. закінчив Київський політехнічний інститут. Область наукових досліджень — методи математичного та комп'ютерного моделювання в задачах дослідження динамічних систем, електричних ланцюгів; чисельні методи і алгоритми рішення інтегральних рівнянь.

ФУРТАТ Юрій Олегович, канд. техн. наук, наук. співр. Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. В 2007 р. закінчив Національний технічний університет «Київський політехнічний інститут». Область наукових досліджень — когнітивно-орієнтована адаптація інформаційної взаємодії користувачів-операторів з автоматизованими системами управління, проектування та навчання; математичне моделювання динамічних гетерогенних систем, проведення чисельних та модельних експериментів.