doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.03.013>
УДК 681.5.015

Ю.А. Клевцов, канд. техн. наук
(Украина, 03150, Киев,
тел. (044) 5290566, e-mail: kk123@ukr.net)

Моделирование эллиптических объектов с распределенными параметрами

Рассмотрена задача моделирования эллиптических объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, на основе спектральной теории нестационарных систем управления. Решены краевые задачи Дирихле, Неймана, Робена. Приведены примеры моделирования, поясняющие применение метода. Введено понятие передаточной функции объекта с распределенными параметрами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: математическое моделирование, спектральная теория, объекты с распределенными параметрами, передаточная функция, краевые задачи.

В работах [2—8] рассмотрена задача моделирования трехмерных объектов параболического и гиперболического типа на основе спектральной теории нестационарных систем управления [1] при нулевых граничных условиях. Были рассмотрены многомерные объекты, описываемые системами дифференциальных уравнений в частных производных, объекты четвертого порядка, граничные условия, заданные не на прямоугольнике. Полученные ранее результаты используем для моделирования трехмерных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа с граничными условиями Дирихле, Неймана, Робена. В примерах, поясняющих применение спектрального метода, используем ненулевые граничные условия.

Спектральная теория объектов с распределенными параметрами (ОРП) основана на конечных интегральных преобразованиях, которые позволяют рассмотреть модель объекта в спектральной области, что приводит к алгебраическим связям в структуре модели объекта. Поэтому от решения дифференциальных уравнений в частных производных переходим к решению системы линейных алгебраических уравнений, что упрощает задачу моделирования.

© Клевцов Ю.А., 2020

Спектральная теория оперирует со спектральными характеристиками (СХ) функций. Рассмотрим некоторую функцию $q(x, y, z)$ аргументов x, y, z , изменяющихся на замкнутых отрезках $[0, l_m]$, $m = x, y, z$. Если функция $q(x, y, z)$ интегрируема с квадратом по всем аргументам

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} [q(x, y, z) dx dy dz]^2 < \infty,$$

то она может быть разложена в ряд Фурье по системе ортонормированных на отрезках $[0, l_m]$ базисных функций $\Phi_{ijk}(x, y, z)$ в пространстве L_2 :

$$Q_{ijk} = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} q(x, y, z) \Phi_{ijk}^*(x, y, z) dx dy dz. \quad (1)$$

Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$q(x, y, z) = \sum_{ijk} Q_{ijk} \Phi_{ijk}(x, y, z). \quad (2)$$

Обозначим оператор определения СХ (1) $Q = S^3[q(x, y, z)]$, а обратный оператор (2) — $q(x, y, z) = S^{-3}[Q]$. Степень при S указывает, для скольких аргументов определяется СХ.

Система базисных функций $\Phi_{ijk}(x, y, z)$ в общем случае может быть представлена в виде произведения одномерных ортонормированных на отрезках $[0, l_m]$ базисных функций $\Phi_{ijk}(x, y, z) = \phi_i(x) \phi_j(y) \phi_k(z)$. Базисные функции $\{\phi\}$ могут быть разного типа.

Правила преобразования дифференциальных уравнений в частных производных в спектральной области позволяют установить соответствие между операциями дифференцирования в пространственной и спектральной областях. Для упрощения примем $l_x = l_y = l_z = l$.

Правило 1. В спектральной области дифференцирование (частные производные второго порядка) по пространственным аргументам с учетом граничных условий Дирихле (первого рода) выполняется по формулам.

Если заданы граничные условия $g_{x0}(y, z) = q(0, y, z)$ и $g_{x1}(y, z) = q(l, y, z)$, то

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial x^2} \right] = (D_1^2 \otimes E \otimes E) Q - G_{x0} + G_{x1}, \quad (3)$$

где D_1^2 — СХ оператора дифференцирования второго порядка, учитывающая граничные условия Дирихле, $D_1^2 = PR$; P — СХ оператора дифференцирования, не учитывающая граничные условия [1],

$$P_{ij} = \int_0^l \phi_i^*(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx;$$

R — СХ оператора дифференцирования, учитывающая граничные условия [2, 3, 8],

$$R_{ij} = \int_0^l \phi_i^*(x) \frac{d\phi_j(x)}{dx} dx + \phi_i^*(0) \phi_j(0) - \phi_i^*(l) \phi_j(l),$$

$\otimes$ — символ прямого (кронекерова) произведения матриц [9, 10]; элементы матриц G_{x0} , G_{x1} вычисляются по формулам

$$G_{x0,ijk} = \left[\sum_h P_{ih} \Delta_h(0) \right] S_{jk}^2[g_{x0}(y, z)], \quad G_{x1,ijk} = \left[\sum_h P_{ih} \Delta_h(l) \right] S_{jk}^2[g_{x1}(y, z)];$$

$\Delta(0)$ и $\Delta(l)$ — СХ дельта-функций в точках 0 и l [1,2]; S_{jk}^2 — оператор нахождения j, k элемента СХ двумерной функции.

Если заданы граничные условия $g_{y0}(x, z) = q(x, 0, z)$ и $g_{y1}(x, z) = q(x, l, z)$, то

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial y^2} \right] = (E \otimes D_1^2 \otimes E) Q - G_{y0} + G_{y1}, \quad (4)$$

где G_{y0} и G_{y1} — элементы матриц, вычисляемые по формулам

$$G_{y0,ijk} = \sum_h P_{jh} \Delta_h(0) S_{ik}^2[g_{y0}(x, z)], \quad G_{y1,ijk} = \sum_h P_{jh} \Delta_h(l) S_{ik}^2[g_{y1}(x, z)].$$

Если заданы граничные условия $g_{z0}(x, y) = q(x, y, 0)$ и $g_{z1}(x, y) = q(x, y, l)$, то

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial z^2} \right] = (E \otimes E \otimes D_1^2) Q - G_{z0} + G_{z1}, \quad (5)$$

где элементы матриц G_{z0} , G_{z1} вычисляются по формулам

$$G_{z0,ijk} = \sum_h P_{kh} \Delta_h(0) S_{ij}^2[g_{z0}(x, y)], \quad G_{z1,ijk} = \sum_h P_{kh} \Delta_h(l) S_{ij}^2[g_{z1}(x, y)].$$

Правило 2. Если заданы граничные условия Неймана (второго рода)

$$g_{x0}(y, z) = \frac{\partial q(0, y, z)}{\partial x}, \quad g_{x1}(y, z) = \frac{\partial q(l, y, z)}{\partial x},$$

то в спектральной области частные производные второго порядка по аргументу x вычисляются по формуле

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial x^2} \right] = (D_2^2 \otimes E \otimes E) Q - G_{x0} + G_{x1}, \quad (6)$$

где D_2^2 — СХ оператора дифференцирования второго порядка, учитывающая граничные условия Неймана, $D_2^2 = RP$; элементы матриц G_{x0} и G_{x1} вычисляются по формулам

$$G_{x0,ijk} = \Delta_i(0) S_{jk}^2[g_{x0}(y, z)], \quad G_{x1,ijk} = \Delta_i(l) S_{jk}^2[g_{x1}(y, z)].$$

Если заданы граничные условия Неймана

$$g_{y0}(x, z) = \frac{\partial q(x, 0, z)}{\partial y}, \quad g_{y1}(x, z) = \frac{\partial q(x, l, z)}{\partial y},$$

то в спектральной области частные производные второго порядка по аргументу y вычисляются по формуле

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial y^2} \right] = (E \otimes D_2^2 \otimes E) Q - G_{y0} + G_{y1}, \quad (7)$$

где элементы матриц G_{y0} и G_{y1} вычисляются по формулам

$$G_{y0,ijk} = \Delta_j(0) S_{ik}^2[g_{y0}(x, z)], \quad G_{y1,ijk} = \Delta_j(l) S_{ik}^2[g_{y1}(x, z)].$$

Если заданы граничные условия Неймана

$$g_{z0}(x, y) = \frac{\partial q(x, y, 0)}{\partial z}, \quad g_{z1}(x, y) = \frac{\partial q(x, y, l)}{\partial z},$$

то в спектральной области частные производные второго порядка по аргументу z вычисляются по формуле

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial z^2} \right] = (E \otimes E \otimes D_2^2) Q - G_{z0} + G_{z1}, \quad (8)$$

где элементы матриц G_{z0} и G_{z1} вычисляются по формулам

$$G_{z0,ijk} = \Delta_k(0) S_{ij}^2[g_{z0}(x, y)], \quad G_{z1,ijk} = \Delta_k(l) S_{ij}^2[g_{z1}(x, y)].$$

Правило 3. В граничной задаче с краевыми условиями Робена (третьего рода) при заданных граничных условиях для аргумента x

$$\begin{aligned}\alpha_{x1} \frac{\partial q(0, y, z)}{\partial x} - \beta_{x1} q(0, y, z) &= g_{x0}(y, z), \\ \alpha_{x2} \frac{\partial q(l, y, z)}{\partial x} + \beta_{x2} q(l, y, z) &= g_{x1}(y, z), \\ \alpha_{x1}^2 + \alpha_{x2}^2 > 0, \quad \beta_{x1}^2 + \beta_{x2}^2 > 0\end{aligned}\quad (9)$$

в спектральной области частные производные второго порядка по аргументу x определяются по формуле

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial x^2} \right] = (D_3^2 \otimes E \otimes E) Q - G_{x0} + G_{x1}, \quad (10)$$

где D_3^2 — СХ оператора дифференцирования второго порядка, учитывающая граничные условия Робена

$$D_3^2 = P^2 + \alpha_{x1} H_0 P - \beta_{x1} H_0 - \alpha_{x2} H_1 P - \beta_{x2} H_1, \quad (11)$$

где H_0, H_1 — двумерные СХ дельта-функций, $H_0 = S^*[\delta(x)] S[\delta(x)]$, $H_1 = S^*[\delta(x-l)] S[\delta(x-l)]$.

Элементы матриц граничных условий (9) вычисляются по формулам

$$G_{x0,ijk} = \Delta_i(0) S_{jk}^2[g_{x0}(y, z)], \quad G_{x1,ijk} = \Delta_i(l) S_{jk}^2[g_{x1}(y, z)].$$

Если заданы граничные условия

$$\begin{aligned}\alpha_{y1} \frac{\partial q(x, 0, z)}{\partial y} - \beta_{y1} q(x, 0, z) &= g_{y0}(x, z), \\ \alpha_{y2} \frac{\partial q(x, l, z)}{\partial y} + \beta_{y2} q(x, l, z) &= g_{y1}(x, z), \\ \alpha_{y1}^2 + \alpha_{y2}^2 > 0, \quad \beta_{y1}^2 + \beta_{y2}^2 > 0,\end{aligned}\quad (12)$$

то в спектральной области частная производная второго порядка по аргументу y выполняется по формуле

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial y^2} \right] = (E \otimes D_3^2 \otimes E) Q - G_{y0} + G_{y1}, \quad (13)$$

где элементы матриц G_{y0} и G_{y1} граничных условий (12) вычисляются по формулам

$$G_{y0,ijk} = \Delta_j(0) S_{ik}^2[g_{y0}(x, z)], \quad G_{y1,ijk} = \Delta_j(l) S_{ik}^2[g_{y1}(x, z)].$$

Если заданы граничные условия

$$\begin{aligned}\alpha_{z1} \frac{\partial q(x, y, 0)}{\partial z} - \beta_{z1} q(x, y, 0) &= g_{z0}(x, y), \\ \alpha_{z2} \frac{\partial q(x, y, l)}{\partial z} + \beta_{z2} q(x, y, l) &= g_{z1}(x, y), \\ \alpha_{z1}^2 + \alpha_{z2}^2 &> 0, \quad \beta_{z1}^2 + \beta_{z2}^2 > 0,\end{aligned}\quad (14)$$

то в спектральной области частная производная второго порядка по аргументу z вычисляется по формуле

$$S^3 \left[\frac{\partial^2 q(x, y, z)}{\partial z^2} \right] = (E \otimes E \otimes D_3^2) Q - G_{z0} + G_{z1}, \quad (15)$$

где элементы матриц G_{z0} и G_{z1} граничных условий (14) вычисляются по формулам

$$G_{z0,ijk} = \Delta_k(0) S_{ij}^2[g_{z0}(x, y)], \quad G_{z1,ijk} = \Delta_k(l) S_{ij}^2[g_{z1}(x, y)].$$

Следует заметить, что матрицы D_3^2 зависят от коэффициентов α, β граничных условий.

Алгоритм моделирования. Пусть модель некоторого объекта описывается уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = -f(x, y, z), \quad q = q(x, y, z), \quad 0 \leq x, y, z \leq l. \quad (16)$$

Заданы граничные условия Дирихле. Все функции удовлетворяют необходимым условиям гладкости. Функция $q(x, y, z)$ дважды дифференцируема по всем аргументам. Используя формулы (3)–(5), уравнение (16) с соответствующими граничными условиями запишем в спектральной области:

$$(D_1^2 \otimes E \otimes E + E \otimes D_1^2 \otimes E + E \otimes E \otimes D_1^2) Q = -F - G_0 + G_1, \quad (17)$$

где $F = S^3[f(x, y, z)]$;

$$G_0 = G_{x0} + G_{y0} + G_{z0}, \quad G_1 = G_{x1} + G_{y1} + G_{z1}. \quad (18)$$

Решая матричное уравнение (17) относительно матрицы Q , получаем

$$Q = W(-F - G_0 + G_1), \quad (19)$$

где $W = (D_1^2 \otimes E \otimes E + E \otimes D_1^2 \otimes E + E \otimes E \otimes D_1^2)^{-1}$. Исходная матрица обращается на основании теоремы 8.5.1 [9], обобщаемой на многомерный случай [8].

Используя формулу обращения (2), найдем искомую функцию $q(x, y, z)$. По аналогичному алгоритму осуществляется моделирование с учетом граничных условий Неймана и Робена. Переход в спектральную область выполняется на основании (6)—(8) для граничного условия Неймана и (10), (13), (15) для граничного условия Робена.

Поскольку матрица W связывает СХ входной $f(x, y, z)$ и выходной $q(x, y, z)$ функций, эта матрица называется передаточной функцией ОРП.

В примерах, поясняющих применение метода, в качестве базисных функций используются ортонормированные на отрезке $[0, 1]$ полиномы Лежандра.

Пример 1. Пусть некоторый ОРП описывается уравнением (16), заданы граничные условия Дирихле

$$\begin{aligned} g_{x0}(y, z) &= \cos(\pi y) \cos(\pi z) + 2, \\ g_{x1}(y, z) &= -\cos(\pi y) \cos(\pi z) + 2, \\ g_{y0}(x, z) &= \cos(\pi x) \cos(\pi z) + 2, \\ g_{y1}(x, z) &= -\cos(\pi x) \cos(\pi z) + 2, \\ g_{z0}(x, y) &= \cos(\pi x) \cos(\pi y) + 2, \\ g_{z1}(x, y) &= -\cos(\pi x) \cos(\pi y) + 2, \end{aligned}$$

и $f(x, y, z) = -3\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z)$. Для размера СХ $n = 6$ матрица D_1^2 имеет вид

$$D_1^2 = \begin{bmatrix} -84 & 0 & -161 & 0 & -132 & 0 \\ 0 & -168 & 0 & -165 & 0 & 0 \\ -161 & 0 & -360 & 0 & -295 & 0 \\ 0 & -165 & 0 & -252 & 0 & 0 \\ -132 & 0 & -295 & 0 & 396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку последний столбец и строка равны нулю, при численных расчетах их отбрасываем. Численные значения матриц P , Δ , СХ функции $\cos(\pi x)$ приведены в [1], а значения матрицы R — в [2, 3, 8].

Используя формулы (17)—(19), получим СХ Q_{ijk} . По формуле обращения (2) найдем искомую функцию $q(x, y, z)$. Поскольку эта функция довольно громоздкая, приведем ее значения для $x = 0, 25$:

Функция $q(0, 25, y, z)$ для примеров 1(а), 2(б), 3(в), 4(г).

$$q(0, 25, y, z) = \begin{bmatrix} 2,694 & 2,494 & 2 & 1,506 & 1,306 \\ 2,494 & 2,352 & 2 & 1,648 & 1,506 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1,506 & 1,648 & 2 & 2,352 & 2,494 \\ 1,306 & 1,506 & 2 & 2,494 & 2,694 \end{bmatrix}.$$

Значения y и z изменяются соответственно по вертикали и горизонтали от нуля до единицы с шагом 0,25 (см. рисунок а). Полученные результаты сравнивались с точным решением $q_0(x, y, z) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) + 2$.

В таблице приведено среднеквадратичное отклонение (СКО) результата $q(x, y, z)$ от точного решения $q_0(x, y, z)$ при различных размерах СХ n .

Пример 2. Пусть объект описывается уравнением Пуассона, заданы граничные условия Дирихле

$$g_{x0}(y, z) = y^2 + z^3, \quad g_{x1}(y, z) = y^2 + z^3 + 1,$$

$$g_{y0}(x, z) = x + z^3, \quad g_{y1}(x, z) = x + z^3 + 1,$$

$$g_{z0}(x, y) = x + y^2, \quad g_{z1}(x, y) = x + y^2 + 1$$

и $f(x, y, z) = -2(3z + 1)$. Численные значения СХ функций x, y^2, z^3 приведены в [1, 7]. Моделирование проводилось по формулам (17)—(19). Для этих исходных данных получен следующий результат моделирования в точке $x = 0,25$:

$$q(0,25, y, z) = \begin{bmatrix} 0,252 & 0,267 & 0,376 & 0,675 & 1,261 \\ 0,308 & 0,570 & 0,802 & 1,098 & 1,322 \\ 0,496 & 0,811 & 1,073 & 1,355 & 1,505 \\ 0,808 & 1,070 & 1,302 & 1,598 & 1,822 \\ 1,252 & 1,267 & 1,376 & 1,675 & 2,261 \end{bmatrix}.$$

Полученная функция $q(x, y, z)$ сравнивалась с точным решением $q_0(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ (см. рисунок б). В таблице приведены значения СКО результата $q(x, y, z)$ от точного решения $q_0(x, y, z)$ для различных значений n .

Пример 3. Рассмотрим граничные условия Неймана. Для размера СХ $n = 6$ матрица D_2^2 имеет вид

$$D_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -18,33 & 0 & -22,98 \\ 0 & 0 & -60 & 0 & -80,5 & 0 \\ 0 & -18,33 & 0 & -168 & 0 & -210,6 \\ 0 & 0 & -80,5 & 0 & -360 & 0 \\ 0 & -22,98 & 0 & -210,6 & 0 & -660 \end{bmatrix}.$$

Первый столбец и первая строка в этой матрице — нулевые. Следовательно, матрица D_2^2 не имеет обратной. В результате уравнение (16) с граничными условиями Неймана решения не имеет. Поэтому в качестве примера рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \pi^2 q = -f(x, y, z), \quad (20)$$

$$q = q(x, y, z), \quad 0 \leq x, y, z \leq 1.$$

Пусть заданы граничные условия Неймана

$$\begin{aligned}\frac{\partial q(0, y, z)}{\partial x} &= \pi \sin(\pi y) \sin(\pi z) = g_{x0}(y, z), \\ \frac{\partial q(1, y, z)}{\partial x} &= -\pi \sin(\pi y) \sin(\pi z) = g_{x1}(y, z), \\ \frac{\partial q(x, 0, z)}{\partial y} &= \pi \sin(\pi x) \sin(\pi z) = g_{y0}(x, z), \\ \frac{\partial q(x, 1, z)}{\partial y} &= -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi z) = g_{y1}(x, z), \\ \frac{\partial q(x, y, 0)}{\partial z} &= \pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) = g_{z0}(x, y), \\ \frac{\partial q(x, y, 1)}{\partial z} &= -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) = g_{z1}(x, y)\end{aligned}$$

и $f(x, y, z) = -4\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z)$. Используя (6)–(8) и тот факт, что $S^3[\pi q(x, y, z)] = \pi(E \otimes E \otimes E)Q$, запишем уравнение (20) в спектральной области:

$$\begin{aligned}(D_2^2 \otimes E \otimes E)Q + (E \otimes D_2^2 \otimes E)Q + \\ + (E \otimes E \otimes D_2^2)Q - \pi(E \otimes E \otimes E)Q = -F + G,\end{aligned}\quad (21)$$

где G — сумма СХ граничных условий. Решая матричное уравнение (21) относительно матрицы Q , получаем $Q = W(-F + G)$, где

$$W = (D_2^2 \otimes E \otimes E + E \otimes D_2^2 \otimes E + E \otimes E \otimes D_2^2 - \pi E \otimes E \otimes E)^{-1}. \quad (22)$$

Следует заметить, что матрица (22) обратима с учетом матрицы $\pi(E \otimes E \otimes E)$, при этом элемент $W_{0,0}$ равен π .

Зависимость точности моделирования от значений n

n	СКО для примеров			
	1	2	3	4
3	0,3	1,25	0,51	0,13
4	0,013	1,38	0,51	0,04
5	0,013	0,999	0,034	0,004
6	0,0002	0,997	0,034	0,002
7	0,0002	0,973	0,036	0,002
8	0	0,973	0,036	0,002
9	0	0,970	0,036	0,002
10	0	0,970	0,036	0,002

По формуле обращения (2) найдем искомую функцию $q(x, y, z)$, которая для $x = 0,25$ имеет следующие значения:

$$q(0,25, y, z) = \begin{bmatrix} -0,0008 & -0,0009 & -0,0012 & -0,0009 & -0,0008 \\ -0,0009 & 0,3530 & 0,4986 & 0,3530 & -0,0009 \\ -0,0012 & 0,4986 & 0,7043 & 0,4986 & -0,0012 \\ -0,0009 & 0,3530 & 0,4986 & 0,3530 & -0,0009 \\ -0,0008 & -0,0009 & -0,0012 & -0,0009 & -0,0008 \end{bmatrix}.$$

Полученные результаты (см. рисунок в) сравнивались с точным решением $q_0(x, y, z) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)$ (см. таблицу).

Пример 4. Рассмотрим граничные условия Робена. Пусть некоторый ОРП описывается уравнением (16), заданы граничные условия

$$\begin{aligned} \alpha_{x1} \frac{\partial q(0, y, z)}{\partial x} - \beta_{x1} q(0, y, z) &= \pi \cos(\pi y) \sin(\pi z) - 2 = g_{x0}, \\ \alpha_{x2} \frac{\partial q(l, y, z)}{\partial x} + \beta_{x2} q(l, y, z) &= -\pi \cos(\pi y) \sin(\pi z) + 2 = g_{x1}, \\ \alpha_{y1} \frac{\partial q(x, 0, z)}{\partial y} - \beta_{y1} q(x, 0, z) &= -\sin(\pi x) \sin(\pi z) - 2 = g_{y0}, \\ \alpha_{y2} \frac{\partial q(x, l, z)}{\partial y} + \beta_{y2} q(x, l, z) &= -\sin(\pi x) \sin(\pi z) + 2 = g_{y1}, \\ \alpha_{z1} \frac{\partial q(x, y, 0)}{\partial z} - \beta_{z1} q(x, y, 0) &= \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) - 2 = g_{z0}, \\ \alpha_{z2} \frac{\partial q(x, y, l)}{\partial z} + \beta_{z2} q(x, y, l) &= -\pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) + 2 = g_{z1}, \\ \alpha_{ij} &= \beta_{ij} = 1, \quad (i = x, y, z, \quad j = 1, 2) \end{aligned}$$

и $f(x, y, z) = -3\pi^2 \sin(\pi x)\cos(\pi y)\sin(\pi z)$. Для размера CX $n = 6$ и $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 1$, $i = x, y, z$, $j = 1, 2$, матрица D_3^2 имеет вид

$$D_3^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4,47 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & -27,5 & 0 & -34,47 \\ -4,47 & 0 & -70 & 0 & -93,91 & 0 \\ 0 & -27,5 & 0 & -182 & 0 & -228,15 \\ -6 & 0 & -93,91 & 0 & -378 & 0 \\ 0 & -34,47 & 0 & -228,15 & 0 & -682 \end{bmatrix}.$$

Используя (10), (11), (13), (15), уравнение (16) запишем в спектральной области:

$$(D_3^2 \otimes E \otimes E) Q + (E \otimes D_3^2 \otimes E) Q + (E \otimes E \otimes D_3^2) Q = -F + G,$$

где G — сумма СХ граничных условий. Отсюда находим

$$Q = (D_3^2 \otimes E \otimes E + E \otimes D_3^2 \otimes E + E \otimes E \otimes D_3^2)^{-1}(-F + G).$$

По формуле обращения (2) найдем искомую функцию $q(x, y, z)$ для $x = 0,25$:

$$q(0,25, y, z) = \begin{bmatrix} 1,9994 & 2,4998 & 2,7058 & 2,4998 & 1,9994 \\ 1,9994 & 2,3534 & 2,4990 & 2,3534 & 1,9995 \\ 2,0000 & 2,0000 & 2,0000 & 2,0000 & 2,0000 \\ 2,0005 & 1,6466 & 1,5010 & 1,6466 & 2,0005 \\ 2,0006 & 1,5002 & 1,2492 & 1,5002 & 2,0006 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 2 приведена полученная функция $q(0,25, y, z)$. Результаты сравнивались с точным решением $q_0(x, y, z) = \sin(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi z) + 2$. В таблице приведено СКО от точного решения $q_0(x, y, z)$ для различных значений размера n .

Выводы

Решению дифференциальных уравнений в частных производных в спектральной области соответствует решение линейных алгебраических матричных уравнений. Поскольку матрица D_2^2 не имеет обратной, в спектральной области не существует решения уравнения (16) с граничными условиями Неймана. Для уравнения Гельмгольца матрица D_2^2 применима. Предлагаемый метод удобен для применения в вычислительных машинах, прост в программировании, позволяет учитывать ненулевые граничные условия. Понятие передаточной функции упрощает решение задач теории автоматического управления ОРП.

Рассмотренный алгоритм не зависит от систем базисных функций, что придает методу универсальность. Использование матриц D_1^2 , D_2^2 , D_3^2 позволяет учитывать граничные условия Дирихле, Неймана, Робена.

Методика формирования матриц дифференцирующих звеньев [4] позволяет учитывать граничные условия, заданные не на прямоугольнике. Если заданы граничные условия Робена, то коэффициенты граничных

условий учитываются в структуре матрицы передаточной функции. Спектральный метод позволяет моделировать ОРП, дифференциальные уравнения которых содержат коэффициенты, зависящие от пространственных переменных [8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974, 335с.
2. Клевцов Ю.А. Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электрон. моделирование. 1988, **10**, № 3, с. 27—31
3. Клевцов Ю.А. Алгоритм моделирования краевой задачи третьего рода // Там же, 2001, **23**, № 3, с. 40—46.
4. Клевцов Ю.А. Моделирование объекта с распределенными параметрами, заданного на прямоугольной области. // Там же, 2011, **33**, № 1, с. 47—55.
5. Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А. Спектральное представление линейных объектов с распределенными параметрами // Кибернетика на морском транспорте, 1981, вып. 10, с. 87—94.
6. Клевцов Ю.А. Моделирование многомерных объектов с распределенными параметрами. // Электрон. моделирование, 2012, **34**, №5, с. 20—40.
7. Клевцов Ю.А. Структурные преобразования моделей систем с распределенными параметрами. // Там же, 2016, **38**, № 1, с. 35—46.
8. Клевцов Ю.А. Моделирование объектов с распределенными параметрами. Спектральный метод. М.: Русайнс, 2018, 144 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978, 280 с.
10. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976, 352 с.

Получена 13.04.20

REFERENCES

1. Solodovnikov, V.V. and Semenov, V.V. (1974), *Spektralnaya teoriya nestatsionarnykh sistem upravleniya* [The Spectral Theory of Non-Stationary Control Systems], Nauka, Moscow, Russia.
2. Klevtsov, Yu.A. (1988), "Spectral Description of Objects with Distributed Parameters", *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 10, no. 3, pp. 27-31.
3. Klevtsov, Yu.A. (2001), "Algorithm for modeling a boundary value problem of the third kind", *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 23, no. 3, pp. 40-46.
4. Klevtsov, Yu.A. (2011), "Modeling an object with distributed parameters defined on a nonrectangular domain", *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 33, no. 1, pp. 47-55.
5. Kraskevitch, V.Ye. and Klevtsov, Yu.A. (1981), "Spectral method of structural - parametric identification of objects with distributed parameters", *Vestn. Kiev. Politekhn. In-ta. Ser. Tekhnicheskaya kibernetika*, Vol. 5, pp. 10-12.
6. Klevtsov, Yu.A. (2012), "Modeling multidimensional objects with distributed parameters", *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 34, no. 5, pp. 20-40.
7. Klevtsov, Yu.A. (2016), "Structural transformations of models of systems with distributed parameters", *Electronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 35-46.
8. Klevtsov, Yu.A. *Modelirovanie obektov s raspredelennymi parametrami. Spektralnyy metod* [Modeling objects with distributed parameters. Spectral method], Rusajns, Moscow, Russia.

9. Lancaster P. *Teoriya matric* [Matrix theory], Nauka, Moscow, Russia.
10. Bellman, R. *Vvedenie v teoriyu matricz* [Introduction to matrix theory], Nauka, Moscow, Russia.

Received 13.04.20

Ю.А. Клевцов

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Розглянуто задачу моделювання еліптичних об'єктів, які описуються лінійними диференціальними рівняннями у часткових похідних, на основі спектральної теорії нестационарних систем управління. Розв'язано крайові задачі Діріхле, Неймана, Робена. Наведено приклади моделювання, які пояснюють застосування методу. Введено поняття передавальної функції об'єкта з розподіленими параметрами.

К л ю ч о в і с л о в а: математичне моделювання, спектральна теорія, об'єкти з розподіленими параметрами, передавальна функція, крайові задачі.

Yu.A. Klevtsov

MODELING OF ELLIPTIC OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Based on the spectral theory of non-stationary control systems, the problem of modeling elliptic objects described by linear partial differential equations is considered. The boundary-value problems of Dirichlet, Neumann, and Robin are solved. Simulation examples explaining the application of the method are given. The concept of the transfer function of an object with distributed parameters is introduced.

K e y w o r d s: mathematical modeling, spectral theory, objects with distributed parameters, transmission function, boundary value problems.

КЛЕВЦОВ Юрий Алексеевич, канд. техн. наук. В 1973 г. окончил Киевский политехнический институт. Область научных исследований — объекты с распределенными параметрами, спектральная теория нестационарных систем управления, задачи моделирования и идентификации.