МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.43.05.003>
УДК 004.94 + 519.642

А.Ф. Верлань, д-р техн. наук, **Л.О. Митько**, канд. фіз.-мат. наук,
О.А. Дячук, канд. техн. наук
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України
Україна, 03164, Київ, вул. Генерала Наумова, 15
тел. +38 (067) 9956673, +38 (093) 8676479, 38 (067) 4259258
e-mail: afverl@gmail.com; lmitko@ukr.net; oadyachuk@ukr.net

Аналіз деяких підходів до моделювання нелінійних динамічних систем за допомогою поліноміальних операторів

Актуальність проблеми математичного опису нелінійних динамічних систем зумовлена необхідністю побудови сучасних систем спостереження для складних технічних об'єктів, таких як силові енергетичні установки. Для вирішення даної проблеми перспективним є використання поліноміальних операторів, отриманих за допомогою укорочених рядів Вольтерри. Це дозволяє відобразити в математичній моделі одночасно нелінійні і динамічні властивості систем. Проаналізовано різні підходи з метою побудови ефективних алгоритмів отримання і застосування їх в задачах спостереження процесів функціонування нелінійних систем.

К л ю ч о в і с л о в а: нелінійні системи, інтегральні моделі, ряди Вольтерри, ефективність обчислень, поліноміальний вираз, експериментальні дані, контроль, діагностика.

Створення сучасних систем вимірювання, керування, контролю та діагностики для об'єктів, які працюють в екстремальних умовах експлуатації (об'єкти ракетно-космічної техніки, атомної енергетики, тепло-технічного обладнання енергетичних установок тощо) супроводжується зростанням складності проектних та дослідницьких задач, що, в свою чергу, зумовлено особливостями побудови та режимів функціонування таких систем. Отже, серед нових вимог до методів і засобів математичного моделювання динамічних систем особливе місце займають системи, в яких необхідно враховувати суттєво нелінійні залежності, що зазвичай проявляються в близьких до критичних умовах експлуатації.

На даний час для дослідження лінійних динамічних систем створено ефективні методи та засоби, базовані як на диференціальних, так і на інтегральних моделях, в тому числі з використанням інтегральних опе-

© Верлань А.Ф., Митько Л.О., Дячук О.А., 2021

раторів Вольтерри. Для дослідження нелінійних динамічних об'єктів поки що немає загальноприйнятих універсальних методів, а наявні не завжди дозволяють розв'язувати поставлені задачі з необхідною точністю.

Існує два основних способи побудови математичних моделей: на основі фізичних законів та на основі експериментальних даних. Із зростанням складності об'єктів застосування першого підходу викликає значні труднощі. Тому здебільшого надають перевагу методам, заснованим на застосуванні другого підходу.

Одним із ефективних підходів для опису нелінійних динамічних об'єктів є інтегро-степеневі ряди Вольтерри. При такому описі нелінійні і динамічні властивості об'єкта повністю характеризуються послідовністю багатовимірних вагових функцій — ядер Вольтерри. Задача побудови моделей у вигляді інтегро-степеневих рядів Вольтерри передбачає визначення багатовимірних ядер Вольтерри на основі експериментальних даних. Задача стійкого чисельного диференціювання як допоміжний інструмент при побудові ядер інтегро-степеневих рядів Вольтерри зумовлює необхідність розробки алгоритмів чисельного диференціювання експериментально отриманих функціональних залежностей та ідентифікації нелінійних динамічних об'єктів у вигляді інтегро-степеневих рядів Вольтерри.

Саме потреба в ефективних методах та засобах моделювання нелінійних динамічних об'єктів визначає перспективність використання рядів Вольтерри для їх математичного опису. Цей науковий напрямок перебуває на етапі розвитку і тому актуальною є науково-технічна задача підвищення ефективності процесів математичного та комп'ютерного моделювання нелінійних динамічних об'єктів при обґрунтуванні і розробці, дослідженні та застосуванні методів побудови та реалізації динамічних моделей у формі інтегро-степеневих рядів Вольтерри.

Розглянемо систему вхід—вихід S , що описується співвідношенням

$$S \subset V_1 \times V_2,$$

де V_1, V_2 — деякі множини, що визначають відповідно вхідні та вихідні сигнали [1,2]. Для цього визначимо структуру V_1, V_2 . Враховуючи прийняті позначення, вважатимемо $V_1 = U \times T, V_2 = Y \times T$. Відображення $K: u \rightarrow y$ з областю значень множини $\{y_i\} \subseteq Y \times T, i \in I$, де I — індексна множина, що складається із цілих чисел $0, 1, 2, \dots$, визначене на множині $\{u_i\} \subseteq U \times T$, являє собою формалізований математичний опис системи S .

Розглянемо явне відображення K , що описує нелінійні системи. Вперше залежність між входом і виходом нелінійної системи було знай-

дено Н. Вінером [3, 4], який використав для цього теорію рядів Вольтерри. Опис нелінійних систем за допомогою ряду Вольтерри має вигляд

$$\begin{aligned} y(t) = Ku(t) = & h_0(t)u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t, s)u(s)ds + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t, s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2 + \dots \\ & \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t, s_1, s_2, \dots, s_n)u(s_1)u(s_2) \dots u(s_n)ds_1ds_2 \dots ds_n, \end{aligned} \quad (1)$$

де $h_0(t) \in L_{\infty}(-\infty, \infty)$; $h_i(t, s_1, s_2, \dots, s_i)$ — ядро i -го порядку,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_i^2(t, s_1, s_2, \dots, s_i)ds_1ds_2 \dots ds_i < \infty, \quad \forall i = \overline{1, n},$$

та зводиться до визначення ядер $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

Два способи визначення ядер ряду запропоновано Н.Вінером [5]. В першому способі використано функції Е. Лагерра $l_n(t)$, ортонормовані на проміжку $[0, \infty)$. При цьому вхідний сигнал може бути подано за допомогою коефіцієнтів V_p :

$$V_p(t) = \int_0^{\infty} l_p(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad p \in I. \quad (2)$$

Для вхідного сигналу $u(t)$, що є гаусовим випадковим процесом із одичною спектральною густиною, вихід системи записують в загальному вигляді за допомогою функції R , яка залежить від вхідного сигналу $u(t)$, а отже, згідно (2) і від коефіцієнтів Лагерра V_p :

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(V_0, V_1, \dots, V_n).$$

У другому способі функція R відображується поліномом Ерміта, в якому змінними є коефіцієнти V_p випадкового процесу $u(t)$:

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} C_{m_0 m_1 \dots m_n} H_{m_0}(V_0(t)) \dots H_{m_n}(V_n(t)), \quad (3)$$

де $H_n(\cdot)$ — нормовані поліноми Ерміта,

$$H_{m_i}(V_i(t)) = (-1)^{m_i} 2^{-\frac{m_i}{2}} \frac{e^{[V_i(t)]^2}}{\sqrt{m_i!}} \frac{d^{m_i}}{dV_i^{m_i}} (e^{-V_i^2}).$$

Ряд (3) називають рядом Вінера, а коефіцієнти $C_{m_0, \dots, m_n}$ — коефіцієнтами Вінера. Знайти їх аналітичні вирази можна, помноживши ліву і праву частини рівняння (3) на

$$H_{m_0}(V_0(t)) H_{m_1}(V_1(t)) \dots H_{m_n}(V_n(t)) e^{-\frac{1}{2}((V_0^2(t)+V_1^2(t)+\dots+V_n^2(t)))}$$

і усереднивши його на інтервалі $(-\infty, +\infty)$. При цьому використовують принцип ергодичності, що дозволяє усереднення по часу у правій частині рівняння замінити усередненням по множині, і враховують ортогональність поліномів Ерміта з вагою $e^{-V_i^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{m_i}(V) H_{m_j}(V) e^{-V^2} dV = \begin{cases} 1, & m_i = m_j, \\ 0, & m_i \neq m_j. \end{cases}$$

В результаті отримують коефіцієнти Вінера, які дорівнюють середньому значенню добутку:

$$C_{m_0 m_1, \dots, m_n} = y(t) H_{m_0}(V_0(t)) \dots H_{m_n}(V_n(t)).$$

Виходи моделі для довільного вхідного сигналу $u(t)$ знаходять, попередньо отримавши розклад по функціям Лагерра відомої вхідної функції

$$u(t) = V_0 l_0(t) + V_1 l_1(t) + \dots + V_n l_n(t). \quad (4)$$

Для цього виконують обчислення по формулі (2). Формула (4) описує вихід лінійної системи із пам'яттю. Пропускаючи вхідний сигнал через n таких паралельно включених лінійних систем з характеристиками $l_0(t), l_1(t), \dots, l_n(t)$, отримуємо на виході коефіцієнти $V_0(t), V_1(t), \dots, V_n(t)$. Далі коефіцієнти $V_i(t)$ використовуються для побудови поліномів Ерміта. В результаті вихід знаходять за формулою, у якій коефіцієнти Вінера відомі з експерименту з білим гаусовим вхідним процесом.

Розглянутий метод Вінера має більшою мірою теоретичне, ніж практичне значення. Впливає цей висновок із труднощів практичної реалізації. Так, при n значеннях коефіцієнтів розкладання вхідного сигналу і p значеннях коефіцієнтів в поліномі Ерміта необхідно обчислити p^n коефіцієнтів Вінера. Практично для ідентифікації нелінійної системи другого порядку необхідно обчислити 10^{10} коефіцієнтів [5].

Спростити процедуру обчислення дозволяє метод С.Н. Бозе, згідно з яким замість поліномів Ерміта використовується функція

$$Q_k(v) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v \text{ міститься в } (t_k, t_k + \varepsilon) \text{ } \varepsilon > 0, \\ 0, & \text{у протилежному випадку } t_k \in T. \end{cases}$$

При цьому отримуємо ряд

$$y(t) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{k_0=1}^m \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m D_{k_0 k_1 \dots k_n} Q_{k_0}(V_0(t)) \dots Q_{k_n}(V_n(t)),$$

в якому коефіцієнти $D_{k_0, \dots, k_n}$ обчислюються за формулою

$$D_{k_0 k_1 \dots k_n} = \frac{\overline{y(t) Q_{k_0}(V_0(t)) \dots Q_{k_n}(V_n(t))}}{\overline{Q_{k_0}(V_0(t)) Q_{k_1}(V_1(t)) \dots Q_{k_n}(V_n(t))}}.$$

Спрощення практичного використання ряду Вінера можливе також за допомогою метода Баррета, за яким, використовуючи зростаючі функції Ерміта

$$\mathcal{H}^{(0)}[u(t)] = 1,$$

$$\mathcal{H}^{(1)}[u(t)] = u(t),$$

$$\mathcal{H}^{(2)}[u(t_1), u(t_2)] = u(t_1) u(t_2) - \delta(t_2 - t_1),$$

.....

отримуємо ряд наступного вигляду:

$$y(t) = \sum_n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \mathcal{H}^{(n)}[u, \tau_1, \dots, \tau_n] d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (5)$$

де ядра

$$K_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \overline{y(t) \mathcal{H}^{(n)}[u, \tau_1, \dots, \tau_n]}$$

визначено для білого гаусового процесу.

Алгоритм ідентифікації нелінійних систем на основі метода Баррета є громіздким і незручним у практичному використанні через труднощі обчислень інтегралів у правій частині виразу (5). Н. Вінер модифікував цей підхід, використавши процедуру ортогоналізації Грамма—Шмідта для отримання нового функціонального ряду.

Використовуючи як вхідний процес функцію $u(t)$ для визначення ядер ряду, обираємо білий гаусовий шум. Для функціоналу першого порядку

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + K_0, \quad (6)$$

де K_0 і K_1 — ядра нульового і першого порядків, визначаємо таке K_0 ,

при якому сума двох членів ряду (6) була б ортогональна будь-якій константі C , тобто виконувалась рівність

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) u(t - \tau) d\tau + K_0 \right] C d\tau = 0. \quad (7)$$

Для усіченого ряду, що складається із трьох членів,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 + K_0, \end{aligned} \quad (8)$$

знаходимо ядра K_1 і K_0 , які задовольняють умові ортогональності будь-якої константи і всім функціоналам першого порядку.

Процес ортогоналізації продовжуємо до отримання функціоналу потрібного порядку, який ортогональний всім іншим функціоналам порядку, меншому за n . У результаті отримуємо функціонал

$$G_1[K_1, u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) u(t - \tau) d\tau,$$

який називається G -функціоналом Вінера першого порядку і задовольняє умові (7). Функціонал

$$\begin{aligned} G_2[K_2, u(t)] = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\ & - N \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau, \tau) d\tau \end{aligned}$$

називається G -функціоналом Вінера другого порядку і задовольняє умові ортогональності для суми (8). G -функціонал Вінера третього порядку має вигляд

$$\begin{aligned} G_3[K_3, u(t)] = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - \\ & - 3N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

де N — потужність спектральної густини вхідного шуму.

Під ортогональністю функціоналів $\{G_i\}$ розуміють середнє по часу значення добутку

$$G_i[K_i, u(t)] G_j[K_j, u(t)] = 0, \forall i, j \leq n, i \neq j.$$

Функціональний ряд Вінера, побудований із ортогональних функціоналів, має вигляд

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[K_n, u(t)]. \quad (9)$$

Н.Вінером було доведено, що G -функціонали, які входять в ряд (9), є поліномами Ерміта. Враховуючи це, (9) можна записати так:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n[K_n, u(t)].$$

Для визначення реакції нелінійної системи на довільний вхідний сигнал $u(t)$ необхідно мати ядра $\{K_i\}$, які можна визначити по взаємній кореляції реакції досліджуваної системи $y(t)$ на вхідний сигнал у вигляді нормального білого шуму $y_{\text{ш}}(t)$ і вихідного сигналу $y_n(t)$ системи, отриманого в результаті вибірки окремих значень вхідного сигналу у різні моменти часу. Для визначення ядер першого порядку потрібен сигнал

$$y_1(t) = \int_0^t \delta(t - \tau_1) u(t - \tau) d\tau, \quad \tau_1, \tau \in [0, t]; \quad (10)$$

для визначення ядер другого порядку — сигнал

$$y_2(t) = \int_0^t \int_0^t \delta(\tau_1 - \sigma_1) \delta(\tau_2 - \sigma_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\upsilon_T, \quad (11)$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in [0, t];$$

в загальному вигляді для ядра n -го порядку —

$$y_n(t) = \int_0^t \dots \int_0^t \delta(\tau_1 - \sigma_1) \dots \delta(\tau_n - \sigma_n) \prod_{r=1}^n u(t - \tau_r) d\upsilon_T, \quad (12)$$

$$r \in I, \sigma \in T, \sigma, \tau \in [0, t],$$

де $d\upsilon_T = d\tau_1 \dots d\tau_n$. Враховуючи (9)—(12), а також властивість ортогональності G -функціоналів

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_m[K_m, u(t)] y_m(t) d\tau = \delta_{mn}, \quad m, n \in I,$$

де δ_{mn} — символ Кронекера, отримуємо взаємну кореляцію

$$\begin{aligned}\overline{y(t)y_1(t)} &= NK_1(\sigma_1), \\ \overline{y(t)y_2(t)} &= 2NK_2(\sigma_1, \sigma_2),\end{aligned}\quad (13)$$

або у загальному випадку —

$$\overline{y(t)y_n(t)} = n!N^n K_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \quad (14)$$

За залежностями (13), (14) визначаються ядра $\{K_i\}$ функціонального ряду моделі досліджуваної системи. Формули (12), (13) мають одне обмеження: ними неможливо скористатися, якщо $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n$. Інше їх зображення, а саме

$$K_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \frac{1}{n!N^n} \overline{\left\{ y(t) - \sum_{m=0}^{n-1} G[K_m, u(t)] \right\} y_n(t)},$$

не має вказаного недоліку. В цілому визначення даним методом ядер Вінера $\{K_i\}$ функціонального ряду, що описує нелінійну систему, потребує значного об'єму обчислень. Наприклад, для системи з одним входом ядро n -го порядку потребує $\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$ обчислень, де $m = \frac{\mu}{\Delta t}$; μ — час пам'яті системи; Δt — дискрета обчислень. Однак в деяких роботах застосовують даний підхід опису нелінійних систем і побудови ядер [6].

Використовуючи ортогональні моменти ядер, ідентифікують також нелінійні нестационарні системи. Об'єм обчислень в процесі ідентифікації як стаціонарних, так і нестационарних систем однаковий [7]. Нелінійна система може бути описана безпосередньо рядом Вольтерри (1). Для визначення ядер цього ряду при $n=2$ розв'язують систему інтегральних рівнянь [5]

$$\begin{aligned}\bar{z}(t) &= \int_0^\infty h_1(\tau_1) u(t-\tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\overline{z(t)u(t-\sigma)} &= \int_0^\infty h_1(\tau_1) \overline{u(t-\tau_1)u(t-\sigma)} d\tau_1 + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)u(t-\sigma)} d\tau_1 d\tau_2,\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \overline{z(t) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2)} = \\ & = \int_0^\infty h_1(\tau_1) \overline{u(t - \tau_1) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2)} d\tau_1 + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (17)$$

отриманих в результаті мінімізації методом варіації сталої квадратичної помилки $[z(t) - y(t)]^2$ спостережуваного виходу системи $z(t)$ і моделі $y(t)$ при довільному вхідному сигналі $u(t)$.

Розв'язання рівнянь (15)–(17) ускладнене. Для цього розроблено ряд обчислювальних методів, серед яких ітеративна процедура оптимізації і послідовних підстановок, градієнтний метод, метод дискретизації по часу. Обчислення ядер спрощується, якщо замість довільного вхідного сигналу $u(t)$ використовувати нормальний білий шум одиничної спектральної густини. Тоді система рівнянь (15)–(17) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau) d\tau, \\ \overline{z(t) u(t - \sigma_1)} &= h_1(\sigma_1), \\ \overline{z(t) u(t - \sigma_1) u(t - \sigma_2)} &= z\delta(\sigma_1 - \sigma_2) + 2h_2(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned}$$

Для моделей з більш високим порядком ядер, ніж $n = 2$, труднощі у обчисленнях зберігаються. Для класу нелінійних стаціонарних систем із детермінованим вхідним впливом визначення ядер Вольтерри можливе за експериментальними даними, якщо вхідним сигналом обрати δ -функцію або ступеневий вплив $1(t)$ [7].

Далі будемо розмірковувати наступним чином: нехай є лінійна стаціонарна система, на вхід якої подається δ -функція. Вихід системи

$$y_1(t) = h_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = h_1(t)$$

дорівнює ядру моделі $h_1(t)$. На практиці отримати δ -функцію не завжди є можливим. Замінивши вхідний сигнал в інтегралі на одиничну сходящую амплітуду A , отримаємо вираз для виходу:

$$y_1(t) = A \int_0^\infty h_1(\tau) 1(t - \tau) d\tau = A \int_0^t h_1(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Продиференціювавши праву частину (18) по верхній межі, маємо

$$h_1(t) = \frac{1}{A} \frac{dy_1(t)}{dt}.$$

Нехай система описується функціоналом другого порядку

$$y_2(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Подача на вхід такої моделі ступінчастого сигналу з амплітудою A зумовлює наступну реакцію:

$$\frac{1}{2} y_2(t) = A^2 \int_0^{t-\tau_1} \int_0^{t-\tau_1-\tau_2} h_2(\tau_1', \tau_2') d\tau_1' d\tau_2'.$$

Для різних значень $\tau_1, \tau_2 > 0$ отримаємо набір реакцій $y_2(t) = y_2(\tau_1, \tau_2, t)$, вздовж яких, двічі продиференціювавши по τ_1 і τ_2 , знайдемо

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2A^2} \frac{\partial^2 y^2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}.$$

Для системи

$$y_n(t) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (19)$$

аналогічно отримують ядро

$$h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!A^n} \frac{\partial^n y_n(\tau_1, \dots, \tau_n)}{\partial \tau_1 \dots \partial \tau_n}.$$

Раніше припускалось, що система моделюється однорідними функціоналами. Якщо це не так, і система описується сумою однорідних функціоналів, то ядро h_{p-1} отримуємо, віднявши із вихідного сигналу всієї системи її реакцію, що подається ядром h_p , ядро h_{p-2} дорівнює різниці виходу системи і реакцій, що вносяться однорідними функціоналами з ядрами h_p і h_{p-1} і так далі до отримання ядра h_1 . Розглянутий метод зручний при моделюванні фізіологічних систем, оскільки впливи на такі системи мають характер, близький до імпульсивного.

Будь-який із описаних функціональних рядів, наприклад (1), (3), (5), (9), будується за даними, отриманими у результаті експериментів із досліджуваною системою. Суть експерименту полягає в тому, що на вхід системи, починаючи з визначеного моменту часу (позначимо його t_0), подається тестовий сигнал, що викликає певну реакцію системи. Експеримент продовжується деякий обмежений за тривалістю час, наприклад до поточного моменту $t < \infty$, тобто поведінка системи спостерігається на кінцевому інтервалі часу $[t_0, t)$.

Цей факт не відображений в попередніх формалізованих описах системи за допомогою математичних моделей. Для практичного використання моделей достатньо встановити межі інтегрування (чи підрахунку сум в дискретному випадку), що відповідають спостережуваному інтервалу. Тоді в (1) при $t^1 > t$ оператор $K_A \equiv 0$, а нижня границя інтегрування для оператора K_C зміниться. Оператор $K = K_M + K_C$ фізично реалізується, оскільки можна реалізувати кожен компонент декомпозиції: оператор K_M може бути подано безінерційною ланкою, оператор K_C — підсистемою, вихід якої не випереджає вхідний вплив.

Ряд Вольтерри (1) застосовується не тільки у часовій області, а і в частотній. Внаслідок переходу в частотну область суттєво спрощується вивчення нелінійних стаціонарних систем, тому що у часовій області замість інтегралів і сум використовують добутки, отримані в комплексній області [8]. Це можливо завдяки багатовимірному перетворенню Лапласа, пристосованому для отримання зображень в частотній області багатовимірних функцій.

Як приклад розглянемо систему, вихід якої описано однорідним функціоналом (19) степеня n . Застосовуючи до залежності (19) перетворення Лапласа (L_n -перетворення), отримуємо

$$Y(p_1, \dots, p_n) = W_n(p_1, \dots, p_n) U(p_1) \dots U(p_n), \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} Y(p_1, \dots, p_n) &= L_n \{y_n(t)\}; \\ W_n(p_1, \dots, p_n) &= L_n \{h_n \otimes (\tau_1, \dots, \tau_n)\}; \\ U(p_1) &= L \{u(t - \tau_1)\}, \dots, U(p_n) = L \{u(t - \tau_n)\}. \end{aligned}$$

Аналогічно лінійним системам із виразу (20) знаходимо відношення передатної функції елементарної системи степеня n :

$$W_n(p_1, \dots, p_n) = \frac{Y(p_1, \dots, p_n)}{U(p_1) \dots U(p_n)}.$$

Після підстановки $p_i = j\omega_i (i \in I, j = \sqrt{-1})$ отримуємо частотну характеристику елементарної системи степеня n — $W(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$, яка є багатомірною комплексною функцією, що описує деяку поверхню в просторі розмірності $2n$ при зміні ω_i від $-\infty$ до $+\infty$. При $n=1$ цей простір перетворюється в комплексну площину.

Якісний стрибок у спрощенні обчислень, пов'язаних з ідентифікацією нелінійних систем, можна отримати в результаті іншого підходу до математичного опису систем. За основу такого підходу беруть теорію інтерполяції. В абстрактній теорії інтерполяції в L_p -просторах існують дві задачі [9]:

- 1) пошук зручних у використанні інтерполяційних операторів;
- 2) опис усіх можливих функціональних просторів, на яких визначено всі можливі інтерполяційні оператори.

Перша задача на відміну від другої є дещо вужчою. Її розв'язок, зважаючи на формулювання, повинен мати практичну направленість. Але за такою ознакою теорія ідентифікації недостатньо висвітлена у літературі. Деякою мірою це компенсовано у роботі [10]. Знайдені в ній конструкції інтерполяційних операторів Лагранжа і Ерміта в гільбертовому просторі дозволили В. Портеру [11] використати їх для побудови моделей лінійних і нелінійних систем (включаючи нестационарні). Всі основні результати, описані у роботі [11], отримано виключно з використанням властивостей належності, які повинна мати синтезована модель.

Розглянемо деякі результати, що стосуються нелінійних систем. Вихідними даними для побудови моделі нелінійної системи є множина вхідних сигналів системи $\{u_i\} \subset U \times T$ ($i = 0, \bar{N}$) і відповідна їй множина вихідних $\{y_i\} \subset Y \times T$. На цих двох множинах функції часу необхідно знайти таке відображення $K: u \rightarrow y$ в гільбертовому просторі, яке б мало властивості

$$P^t K P^t = P^t K, K u_i = y_i \left(\forall i = \overline{0, N} \right)$$

і було б неперервне на обраній області вхідних сигналів.

Задовольнити цим вимогам може тільки інтерполяційний причинний оператор з вузлами інтерполяції в точках u_i, y_i ($i = \overline{0, N}$). Вимоги належності оператора K зумовлюють певні узгодження експериментальних даних, що досягається введенням оператора усічення P^t у допоміжні скалярні функції $m_{ij}(u, t)$, значення яких обчислюють так:

$$m_{ij}(u, t) = \begin{cases} \frac{\langle P^t(u - u_j), (u_i - u_j) \rangle}{\|P^t(u_i - u_j)\|^2}, & t_0 \neq t, \\ 0, & t_0 = t. \end{cases}$$

Тут $\langle \cdot \rangle$ — скалярний добуток; $\|\cdot\|$ — норма в гільбертовому просторі. Отримавши значення $m_{ij}(u, t)$, знаходимо добуток

$$M_i(u, t) = \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^N m_{ij}(u, t)$$

і за допомогою інтегрального оператора — вихід моделі i -го порядку:

$$Ku(t) = \sum_{i=1}^N \int dP^s y_i M_i(u, s).$$

У роботі [11] доведено ряд властивостей скалярних функцій $m_{ij}(u, t)$, $M_i(u, t)$ і оператора K , звідки випливає виконання усіх заданих вимог до моделі. Найбільшими обмеженнями на вихідні дані є вимога лінійності незалежності множини вхідних функцій $\{y_i\} (i = \overline{0, N})$.

Нелінійна залежність $f: u \rightarrow y$ між входом і виходом може мати кусково-лінійну апроксимацію [12]. Для цього необхідно, щоб функції, які описують вхідні і вихідні сигнали, були обмежені класом аналітичних функцій. Розглянемо кусково-лінійну апроксимацію тільки динамічних характеристик об'єкта. Для двокускової апроксимації з обраними точками $M_{01}(u_{01}, y_{01}, t_{01})$ і $M_{02}(u_{02}, y_{02}, t_{02})$ при $u_{01} = u_{02}$, $y_{01} = y_{02}$ рівняння моделі, що ідентифікує об'єкт в області точки M_{01} , має вигляд

$$\begin{aligned} y_1 = y_{01} + & \left[\frac{df[u(t)]}{\partial u(t)} \right]_{01} [u(t) - u_{01}(t)] + \\ & + \left[\frac{df[u(t)]}{\partial t} \right]_{01} (t - t_{01}), \end{aligned} \quad (21)$$

а в області точки M_{02} —

$$\begin{aligned} y_1' = y_{01} + & \left[\frac{df[u(t)]}{\partial u(t)} \right]_{01} [u(t) - u_{01}(t)] + \\ & + \left[\frac{df[u(t)]}{\partial t} \right]_{02} (t - t_{02}). \end{aligned} \quad (22)$$

Коефіцієнти рівнянь (21) і (22) — частинні похідні отримуємо експериментально. Вихід моделі визначаємо після підстановки значень коефіцієнтів і початкових умов в праву частину рівняння. Модель нелінійної системи (21), (22) можна побудувати і у випадку, коли експериментальні дані містять випадкові збурення, враховуючи їх при визначенні коефіцієнтів рівнянь.

Модель нелінійної системи можна також побудувати за допомогою деякої сукупності коефіцієнтів і параметрів, що враховують вплив вхідних сигналів на вихідні і таких, що не мають у реальному об'єкті фізичного аналога. Така модель для $l \in I$ вхідних сигналів може мати вигляд [13, 14]

$$y(t) = \sum_{i_1=0}^k \sum_{i_2=0}^k \dots \sum_{i_p=0}^k a_{i_1, i_2, \dots, i_p} u_1^{i_1}(t) \dots u_l^{i_p}(t), \quad k, i_p \in I, \quad a_{i_1, i_2, \dots, i_p} \in R. \quad (23)$$

Модель (23) називають параметричною. В математичному плані вона є поліноміальною, оскільки її права частина містить суму полістепеневих виразів. Порядок полінома k впливає на порядок адекватності моделі системи, що досліджується. Із збільшенням порядку і кількості вхідних сигналів збільшується трудомісткість обчислень і об'єм пам'яті, тому на практиці порядок моделі не перевищує другого [13].

Серед робіт, присвячених параметричній ідентифікації, заслуговує уваги робота [15], в якій описано економію пам'яті і часу обчислень внаслідок використання рекурентної процедури ідентифікації.

Стан системи в момент часу t_{k+1} описується формулою

$$y(t_{k+1}) = g[y(t_k)] + u(t_k), \quad u, y \in R^n, \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} g[y(t_k)] &= [y^2(t_k), \dots, y^n(t_k), \Psi[y(t_k)]]^T, \\ \Psi[y(t_k)] &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} y^{i_1}(t_k) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} y^{i_1}(t_k) y^{i_2}(t_k) + \dots \\ &\dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{p-1}=1}^{i_{p-2}} \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} a_{i_1, \dots, i_p} y^{i_1}(t_k) y^{i_2}(t_k) \dots y^{i_p}(t_k). \end{aligned} \quad (25)$$

На відміну від моделі (23), що являє собою поліноміальну залежність між вхідними і вихідними сигналами, в (24) поліноміальна залежність існує між виходом в даний момент часу і попередніми вихідними сигналами.

Вираз (25) перетворимо до наступного:

$$\Psi[y(t_k)] = a^T \Phi[y(t_k)],$$

де

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_{11} & \dots & \underbrace{a_{11\dots1}}_p \\ a_2 & a_{21} & \dots & a_{21\dots1} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{nn\dots n} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\Phi[y(t_k)] = \begin{pmatrix} y(t_k) & y(t_k)y(t_k) & \dots & \underbrace{y(t_k)y(t_k)\dots y(t_k)}_p \\ y^2(t_k) & y^2(t_k)y(t_k) & \dots & \\ \vdots & y^2(t_k)y^2(t_k) & \dots & \\ y^n(t_k) & \vdots & & \vdots \\ 0 & y^n(t_k)y^n(t_k) & \dots & \\ \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & y^n(t_k)y^n(t_k)\dots y^n(t_k) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Вигляд матриці (27) вказує на характер поліноміальної системи, в даному випадку — алгебраїчної.

В роботі [15] розглянуто також тригонометричний поліном з матрицею

$$\Phi[y(t_k)] = [\sin y(t_k), \cos y(t_k), \dots, \sin ny(t_k), \cos ny(t_k)]^T, \\ a = [a_1, \dots, a_{2n}]^T.$$

Отримання таблиці параметрів (26) — суть ідентифікації даним методом. У вихідних даних для побудови алгоритму ідентифікації передбачено адитивну шумову складову на виході системи. Тому процедура ідентифікації будується у відповідності із рекурентним виразом

$$\hat{a}_{k+n} = \hat{a}_{k-1} + H - \hat{A}a_{k-1}, \quad k = 1, n+2, 2n+3, \dots,$$

де H і A — відомі матриці.

В роботі [15] наведено два приклади, які засвідчують, що п'ятивідсоткова помилка ідентифікації отримується для моделі третього порядку приблизно за 3500 ітерацій, а модель п'ятого порядку потребує близько 1200—1500 ітерацій.

Серед інших методів ідентифікації варто зазначити метод, в якому використовується математичний апарат ланцюгових дробів [16]. Цей метод можна застосовувати при достатньо гладкому вхідному сигналі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: Математические основы. М.: Мир, 1978, 455 с.
2. Orava P.J. On the concepts of input-output model, causality, and state in the theory of dynamical systems and control // Acta polytechn. scand. Math. and Comput. Sci., 1979, N 31, pp. 120—127.
3. Винер Н. Нелинейные задачи теории случайных процессов. М.: Изд-во иностр. лит., 1961, 159 с.
4. Пупков К.А. Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1965, 403 с.
5. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975, 683 с.
6. Billings S.A. Identification of nonlinear system – a survey // IEEE Proc., 1980, **127**, N 6, pp. 272—285.
7. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976, 448 с.
8. Попков Ю.С., Киселев О.Н., Петров Н.П., Шмудьян В.Л. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. М.: Энергия, 1976, 415 с.
9. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, 664 с.
10. Prenter P.M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach space // J. Approxim. theory, 1971, **4**, N 4, pp. 419—432.
11. Porter W.A. Data Interpolation: causality, structure and system identification // Inform. and Contr., 1975, **29**, N 3, pp. 217—233.
12. Пухов Г.Е., Хатиаишвили Ц.С. Критерии и методы идентификации объектов. Киев: Наук. думка, 1979, 271 с.
13. Райбман Н.С., Капитоненко В.В., Овсепян Ф.А. и др. Дисперсионная идентификация. М.: Наука, 1981, 336 с.
14. King R.E., Paraskevopoulos P.N. Parametric identification of discrete-time SISO systems // Int. J. Contr., 1979, **30**, N 6, pp. 1023—1029.
15. Netravali A.N., De Fimireolo P.J. On the Identification of Nonlinear Dynamical Systems. // IEEE Trans. Autom. Contr., 1971, **16**, N 1, pp. 28—36.
16. Карпузов В.В. Цепные аппроксимационные схемы динамических процессов // Докл. АН УССР, 1977, № 2, с. 175—179.

Отримано 16.07.21

REFERENCES

1. Mesarovich, M., Takahara, Ja. (1978), *Obshchaya teoriya sistem: Matematicheskiye osnovy* [General Systems Theory: Mathematical Foundations], Mir, Moscow, USSR.
2. Orava, P.J. (1979), "On the concepts of input-output model, causality, and state in the theory of dynamical systems and control", *Acta Polytechnica Scandinavica Mathematics and Computing Series*, Vol. 31, pp. 120-127.
3. Viner, N. (1961), *Nelineynyye zadachi teorii sluchaynykh protsessov* [Nonlinear problems of the theory of stochastic processes], Izdatel'stvo inostrannoy literatury, Moscow, USSR.
4. Pupkov, K.A. (1965), *Statisticheskoy raschet nelineynykh sistem avtomaticheskogo* [Statistical calculation of nonlinear automatic systems], Mashinostroyeniye, Moscow, USSR.
5. Eykhoff, P. (1975), *Osnovy identifikatsii sistem upravleniya* [Fundamentals of identification of control systems], Mir, Moscow, USSR.
6. Billings, S.A. (1980), "Identification of nonlinear system – a survey", *IEEE Proceedings*, Vol. 127, no. 6, pp. 272-285.
7. Pupkov, K.A., Kapalin, V.I. and Yushchenko, A.S. (1976), *Funktsionalnyye ryady v teorii nelineynykh sistem* [Functional series in the theory of nonlinear systems], Nauka, Moscow, USSR.
8. Popkov, Yu.S., Kiselev, O.N., Petrov, N.P. and Shmulyan, V.L. (1976), *Identifikatsiya i optimizatsiya nelineynykh stokhasticheskikh sistem* [Identification and optimization of nonlinear stochastic systems], Energiya, Moscow, USSR.
9. Tribel, Kh. (1980), *Teoriya interpolatsii, funktsional'nyye prostranstva, differentsial'nyye operatory* [Interpolation theory, function spaces, differential operator], Mir, Moscow, USSR.
10. Prenter, P.M. (1971), "Lagrange and Hermite interpolation in Banach space", *Journal of Approximation Theory*, Vol. 4, no. 4, pp. 419-432.
11. Porter, W.A. (1975), "Data Interpolation: causality, structure and system identification", *Information and Control*, Vol. 29, no. 3, pp. 217-233.
12. Pukhov, G.Ye., Khatishvili, Ts.S. (1979), *Kriterii i metody identifikatsii ob'yektov* [Object identification criteria and methods], Naukova dumka, Kiev, USSR.
13. Raibman, N.S., Kapitonenko, V.V., Ovsepyan, F.A. and others (1981), *Dispersionnaya identifikatsiya* [Dispersion identification], Nauka, Moscow, USSR.
14. King, R.E. and Paraskevopoulos, P.N. (1979), "Parametric identification of discrete-time SISO systems", *International Journal of Control*, Vol. 30, no. 6, pp. 1023-1029.
15. Netravali, A.N. and De Figueiredo, P.J. (1971), "On the Identification of Nonlinear Dynamical Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 16, no. 1, pp. 28-36.
16. Kartuzov, V.V. (1977), "Chain approximation schemes for dynamic processes", *Doklady Akademii nauk SSSR*, Vol. 2, pp. 175-179.

Received 16.07.21

A.F. Verlan, L.O. Mitko, O.A. Dyachuk

ANALYSIS OF SOME APPROACHES TO MODELING NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS USING POLYNOMIAL OPERATORS

The problem of mathematical description of nonlinear dynamical systems remains relevant today, especially given the need to build modern surveillance systems for complex technical objects, such as power plants. The use of polynomial operators obtained with the help of shortened Volterra series to solve this problem, as practice has shown, proved to be promising, because this method allows to display in the mathematical model both nonlinear and dynamic properties of systems. For further development of the method, it is advisable to analyze diffe-

rent approaches in order to build effective algorithms for obtaining and applying in the problems of monitoring the functioning of nonlinear systems.

Keywords: nonlinear systems, integrated models, Volterra series, computational efficiency, polynomial expression, experimental data, control, diagnostics.

ВЕРЛАНЬ Анатолій Федорович, д-р техн. наук, професор, гол. наук. співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. У 1956 р. закінчив Київський політехнічний інститут. Область наукових досліджень — методи математичного та комп'ютерного моделювання в задачах дослідження динамічних систем, електричних ланцюгів; чисельні методи і алгоритми рішення інтегральних рівнянь.

МИТЬКО Лідія Олексіївна, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. У 1976 р. закінчила Київський державний університет ім. Тараса Шевченка. Область наукових досліджень — методи математичного та комп'ютерного моделювання в задачах дослідження динамічних систем, математичне моделювання фізико-хімічних процесів.

ДЯЧУК Олександр Анатолійович, канд. техн. наук, наук. співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. У 2005 р. закінчив Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка. Область наукових досліджень — теоретико-методологічні проблеми математичного та комп'ютерного моделювання, прогнозування та системного аналізу соціально-економічних та енерго-екологічних систем.