DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.43.05.073>
УДК 519.213:621.391

О.І. Красильников, канд. фіз.-мат. наук
Ін-т технічної теплофізики НАН України
Україна, 03057, Київ, вул. Марії Капніст, 2а
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net

Аналіз кумулянтних коефіцієнтів двокомпонентних сумішей зсунутих негаусових розподілів

Проаналізовано залежність кумулянтних коефіцієнтів двокомпонентних сумішей зсунутих негаусових розподілів від вагового коефіцієнта і визначено умови, за яких кумулянтні коефіцієнти будь-яких порядків дорівнюють нулю. Досліджено залежність кумулянтних коефіцієнтів двокомпонентних сумішей від параметра зсуву та визначено його значення, при яких кумулянтні коефіцієнти будь-яких порядків мають екстремуми і нулі. Досліджено залежність коефіцієнтів асиметрії та ексцесу двокомпонентної суміші зсунутих розподілів Гумбеля типу 1 від вагового коефіцієнта та параметра зсуву і отримано їх значення, при яких коефіцієнти асиметрії та ексцесу суміші дорівнюють нулю. Розглянуто особливості комп'ютерного моделювання випадкових величин, щільність імовірностей яких є двокомпонентною сумішшю зсунутих розподілів.

К л ю ч о в і с л о в а: негаусові розподіли, двокомпонентні суміші розподілів, кумулянтний аналіз, кумулянтні коефіцієнти, коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу.

В останні десятиліття широко застосовуються двокомпонентні суміші розподілів як негаусові моделі досліджуваних фізичних величин і процесів. Функція їх розподілу визначається так [1]:

$$F(x) = qF_1(x) + pF_2(x), \quad (1)$$

де $F_1(x)$ і $F_2(x)$ — складові суміші, що є деякими функціями розподілу; q, p — вагові коефіцієнти, що задовольняють умовам $q, p \in [0; 1]$, $q + p = 1$.

Окремим випадком моделей (1) є сім'я двокомпонентних сумішей зсунутих і масштабованих функцій розподілу $F_0(x)$, які називаються

© Красильников О.І., 2021

базовими:

$$F(x) = qF_0\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right) + pF_0\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right), \quad (2)$$

де $a_1, a_2 \in (-\infty; \infty)$ — параметри зсуву, $a_1 < a_2$; $b_1, b_2 \in (0; \infty)$ — параметри масштабу.

У роботах [2—9] наведено результати розв’язання задачі ідентифікації параметрів моделей (1), (2) методом максимальної правдоподібності. У роботах [2—6] розглянуто модель (2), в якій розподіл $F_0(x)$ — гаусовий [2], Лапласа [3], Релея [4], гаусовий, гамма, Гумбеля [5], експоненціальний, гамма, логнормальний, Вейбулла, Гомперца [6].

У роботі [7] для моделювання екстремальних гідрометеорологічних явищ розглянуто дві моделі: суміш зсунутих і масштабованих розподілів Гумбеля та суміш гамма-розподілу і розподілу Гумбеля. У [8, 9] для аналізу неоднорідних даних про виживання використано суміші двох однакових розподілів: експоненціального, гамма, логнормального, Вейбулла і всі попарні комбінації цих розподілів, а також суміші логнормального розподілу з експоненціальним, гамма-розподілом і з розподілом Вейбулла.

Аналіз робіт [2—9] свідчить про те, що актуальною залишається задача дослідження кумулянтних коефіцієнтів двокомпонентних сумішей розподілів. Деякі результати розв’язання цієї задачі подано у роботах [10—20]. В [10] досліджено коефіцієнт ексцесу двокомпонентної суміші масштабованих гаусових розподілів та її кумулянтний коефіцієнт шостого порядку, в [11] — коефіцієнт ексцесу засмічених гаусових розподілів, в [12] проаналізовано кумулянтні коефіцієнти до шостого порядку двокомпонентних сумішей зсунутих гаусових розподілів з рівними дисперсіями.

У роботі [13] чисельними методами визначено області можливих значень коефіцієнтів асиметрії та ексцесу двокомпонентної гаусової суміші, а в [14] досліджено коефіцієнти асиметрії та ексцесу суміші спряжених узагальнених гамма-розподілів. У [15, 16] обґрунтовано класи негаусових симетричних розподілів з нульовим коефіцієнтом ексцесу, в [17] — моделі несиметричних розподілів з нульовим коефіцієнтом асиметрії.

У роботах [18—20] розглянуто задачі математичного моделювання двокомпонентних сумішей з різними розподілами складових.

Поставимо задачу проаналізувати кумулянтні коефіцієнти двокомпонентних сумішей зсунутих негаусових розподілів.

Модель двокомпонентних сумішей зсунутих розподілів. Розглянемо суміш розподілів (2), в якій покладемо $b_1 = b_2 = 1$. Позначимо $a_2 - a_1 = 2a$

і, не порушуючи загальності, задамо $a_1 = -a$. Тоді $a_2 = a$ і формула (2) набуває вигляду

$$F(x) = qF_0(x+a) + pF_0(x-a) \quad (3)$$

та визначає сім'ю моделей двокомпонентних сумішей зсунутих розподілів $F_0(x)$ з параметром зсуву a і ваговими коефіцієнтами q, p .

В роботі [21] показано, що суміш (3) є функцією розподілу випадкової величини

$$\xi = \xi_0 + \xi_1. \quad (4)$$

Тут ξ_0, ξ_1 — незалежні випадкові величини; ξ_0 — випадкова величина з функцією розподілу $F_0(x)$; ξ_1 — дискретна випадкова величина з функцією розподілу

$$F_1(x) = qE(x+a) + pE(x-a),$$

де $E(x)$ — одинична функція.

Формула (3) дозволяє моделювати безліч функцій розподілу і відповідно випадкові величини (4) будь-якого типу — дискретні, неперервні і змішані. Зокрема, якщо ξ_0 — неперервна випадкова величина, то її функція розподілу $F_0(x)$ абсолютно неперервна і має щільність імовірностей $p_0(x) = F'_0(x)$. Тоді випадкова величина (4) є неперервною і її щільність імовірностей має вигляд

$$p(x) = qp_0(x+a) + pp_0(x-a). \quad (5)$$

Кумулянтні коефіцієнти двокомпонентних сумішей (3). Кумулянти $\kappa_s(p, a)$ і кумулянтні коефіцієнти $\gamma_s(p, a)$ сумішей (3) мають вигляд [21]

$$\begin{aligned} \kappa_s(p, a) &= \kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}(p, a), \\ \gamma_s(p, a) &= \frac{\kappa_s(p, a)}{\kappa_2^{s/2}(p, a)} = \frac{\kappa_{s,0} + \kappa_{s,1}(p, a)}{(\kappa_{2,0} + \kappa_{2,1}(p, a))^{s/2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\kappa_{s,0}, \kappa_{s,1}(p, a)$ — кумулянти випадкових величин ξ_0, ξ_1 ; $s = 1, 2, \dots$ — порядок кумулянтів. Кумулянти $\kappa_{s,1}(p, a)$ для $s = \overline{1, 8}$ отримано в [20]:

$$\kappa_{s,1}(p, a) = a^s \kappa_{s,1}(p), \quad (7)$$

де кумулянти $\kappa_{s,1}(p) = \kappa_{s,1}(p, 1)$ є многочленами степеня s від p :

$$\begin{aligned} \kappa_{1,1}(p) &= 2p - 1, \quad \kappa_{2,1}(p) = 4(p - p^2), \quad \kappa_{3,1}(p) = 8(p - 3p^2 + 2p^3), \\ \kappa_{4,1}(p) &= 16(p - 7p^2 + 12p^3 - 6p^4), \end{aligned}$$

Рис. 1. Графіки кумулянтів $\kappa_{s,1}(p)$, $s = \overline{3,8}$

$$\begin{aligned}\kappa_{5,1}(p) &= 32(p - 15p^2 + 50p^3 - 60p^4 + 24p^5), \\ \kappa_{6,1}(p) &= 64(p - 31p^2 + 180p^3 - 390p^4 + 360p^5 - 120p^6), \\ \kappa_{7,1}(p) &= 128(p - 63p^2 + 602p^3 - 2100p^4 + 3360p^5 - 2520p^6 + 720p^7), \\ \kappa_{8,1}(p) &= 256(p - 127p^2 + 1932p^3 - \\ &\quad - 10206p^4 + 25200p^5 - 31920p^6 + 20160p^7 - 5040p^8).\end{aligned}\quad (8)$$

На рис. 1 наведено графіки кумулянтів $\kappa_{s,1}(p)$, $s = \overline{3,8}$.

Постановка задачі. Для дослідження кумулянтних коефіцієнтів суміші (3), враховуючи (7), перетворимо вираз (6) до виду

$$\gamma_s(p, \tilde{a}) = \frac{\gamma_{s,0} + \tilde{a}^s \kappa_{s,1}(p)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p))^{s/2}}, \quad (9)$$

де $\gamma_{s,0}$ — кумулянтний коефіцієнт випадкової величини ξ_0 ; $\tilde{a} = a/\sigma_0$ — нормований параметр зсуву; $\sigma_0 = \kappa_{2,0}^{1/2}$ — середнє квадратичне відхилення величини ξ_0 .

З формули (9) випливає, що $\gamma_s(p, \tilde{a}) > 0$, якщо $\gamma_{s,0} > 0$, $\kappa_{s,1}(p) > 0$ і $\gamma_s(p, \tilde{a}) < 0$, якщо $\gamma_{s,0} < 0$, $\kappa_{s,1}(p) < 0$. Якщо ж коефіцієнти $\gamma_{s,0}$ і кумулянти $\kappa_{s,1}(p)$ мають різні знаки, то коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ можуть бути додат-

ними, від'ємними або дорівнювати нулю. Отже, для дослідження кумулянтних коефіцієнтів суміші (3) необхідно знати області значень вагового коефіцієнта p , при яких кумулянти $\kappa_{s,1}(p)$ є від'ємними та додатними.

Нехай $p_{s,k}$ — корені рівняння $\kappa_{s,1}(p) = 0$, $0 \leq p \leq 1$, де k — номер кореня. У табл. 1 наведено корені рівняння $\kappa_{s,1}(p) = 0$, отримані для $s = \overline{3,8}$ [20], та області значень p , при яких $\kappa_{s,1}(p) < 0$ і $\kappa_{s,1}(p) > 0$.

Розглянемо дві задачі: залежність кумулянтних коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ від вагового коефіцієнта p та їх залежність від параметра зсуву $\tilde{a}$.

Аналіз залежності коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ від вагового коефіцієнта p . Визначимо корені рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ і проаналізуємо екстремуми коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$.

Корені рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$. З формули (9) випливає, що рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ набуває вигляду

$$\gamma_{s,0} + \tilde{a}^s \kappa_{s,1}(p) = 0. \quad (10)$$

Кумулянти $\kappa_{s,1}(p)$ є многочленами степеня s , тому рівняння (10) відносно змінної p є алгебраїчним рівнянням степеня s , яке в загальному випадку має s коренів, враховуючи дійсні і комплексні. Визначимо умови існування дійсних коренів рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ на інтервалі $(0; 1)$, які залежать від значення коефіцієнта $\gamma_{s,0}$, параметра $\tilde{a}$ та екстремумів функції $\kappa_{s,1}(p)$.

Кумулянти $\kappa_{s,1}(p)$ мають $s - 1$ екстремум (див. рис. 1). Позначимо $p_{s,\min k}$, $p_{s,\max k}$ точки екстремумів функції $\kappa_{s,1}(p)$, а $\min_k \kappa_{s,1}(p) = \kappa_{s,1}(p_{s,\min k})$ і $\max_k \kappa_{s,1}(p) = \kappa_{s,1}(p_{s,\max k})$ — її локальні мінімуми і максимуми. У табл. 2. наведено отримані чисельними методами за формулами (8) точки екстремумів функції $\kappa_{s,1}(p)$, її локальні мінімуми та максимуми. Оскільки при всіх значеннях k $\min_k \kappa_{s,1}(p) < 0$, а $\max_k \kappa_{s,1}(p) > 0$ (див. табл. 2), рівняння (10) має дійсні корені на інтервалі $(0; 1)$ за виконання таких умов:

$$\gamma_{s,0} + \tilde{a}^s \min_k \kappa_{s,1}(p) \leq 0, \text{ якщо } \gamma_{s,0} > 0; \quad (11)$$

$$\gamma_{s,0} + \tilde{a}^s \max_k \kappa_{s,1}(p) \geq 0, \text{ якщо } \gamma_{s,0} < 0. \quad (12)$$

Таблиця 1

Кумулянт $\kappa_{s,1}(p)$	Корені рівняння $\kappa_{s,1}(p) = 0$	Область	
		$\kappa_{s,1}(p) < 0$	$\kappa_{s,1}(p) > 0$
$\kappa_{3,1}(p)$	$p_{3,1} = 0, p_{3,2} = 0,5, p_{3,3} = 1$	$p \in (p_{3,2}; p_{3,3})$	$p \in (p_{3,1}; p_{3,2})$
$\kappa_{4,1}(p)$	$p_{4,1} = 0, p_{4,2} = 0,21133;$ $p_{4,3} = 0,78868, p_{4,4} = 1$	$p \in (p_{4,2}; p_{4,3})$	$p \in (p_{4,1}; p_{4,2});$ $p \in (p_{4,3}; p_{4,4})$
$\kappa_{5,1}(p)$	$p_{5,1} = 0, p_{5,2} = 0,09175,$ $p_{5,3} = 0,5; p_{5,4} = 0,90825; p_{5,5} = 1$	$p \in (p_{5,2}; p_{5,3});$ $p \in (p_{5,4}; p_{5,5})$	$p \in (p_{5,1}; p_{5,2});$ $p \in (p_{5,3}; p_{5,4})$
$\kappa_{6,1}(p)$	$p_{6,1} = 0, p_{6,2} = 0,04132,$ $p_{6,3} = 0,30098, p_{6,4} = 0,69902,$ $p_{6,5} = 0,95868, p_{6,6} = 1$	$p \in (p_{6,2}; p_{6,3}),$ $p \in (p_{6,4}; p_{6,5}),$	$p \in (p_{6,1}; p_{6,2}),$ $p \in (p_{6,3}; p_{6,4}),$ $p \in (p_{6,5}; p_{6,6})$
$\kappa_{7,1}(p)$	$p_{7,1} = 0, p_{7,2} = 0,01915,$ $p_{7,3} = 0,18044, p_{7,4} = 0,5,$ $p_{7,5} = 0,81956, p_{7,6} = 0,98085,$ $p_{7,7} = 1$	$p \in (p_{7,2}; p_{7,3}),$ $p \in (p_{7,4}; p_{7,5}),$ $p \in (p_{7,6}; p_{7,7})$	$p \in (p_{7,1}; p_{7,2}),$ $p \in (p_{7,3}; p_{7,4}),$ $p \in (p_{7,5}; p_{7,6})$
$\kappa_{8,1}(p)$	$p_{8,1} = 0, p_{8,2} = 0,00906,$ $p_{8,3} = 0,10918, p_{8,4} = 0,34864,$ $p_{8,5} = 0,65136, p_{8,6} = 0,89082,$ $p_{8,7} = 0,99094, p_{8,8} = 1$	$p \in (p_{8,2}; p_{8,3}),$ $p \in (p_{8,4}; p_{8,5}),$ $p \in (p_{8,6}; p_{8,7})$	$p \in (p_{8,1}; p_{8,2}),$ $p \in (p_{8,3}; p_{8,4}),$ $p \in (p_{8,5}; p_{8,6}),$ $p \in (p_{8,7}; p_{8,8})$

За формулами (11), (12) знаходимо мінімальні значення $\min \tilde{a}_{s,k}$ параметра $\tilde{a}$, при яких рівняння (10) має дійсні корені

$$\min \tilde{a}_{s,k} = \begin{cases} (-\gamma_{s,0} / \min_k \kappa_{s,1}(p))^{1/s}, & \text{якщо } \gamma_{s,0} > 0; \\ (-\gamma_{s,0} / \max_k \kappa_{s,1}(p))^{1/s}, & \text{якщо } \gamma_{s,0} < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Визначимо кількість можливих дійсних коренів рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ на інтервалі $p \in (0; 1)$. Нехай у формулі (13) $\gamma_{s,0} > 0$ і $\min_r \kappa_{s,1}(p)$ — абсолютний мінімум або $\gamma_{s,0} < 0$ і $\max_r \kappa_{s,1}(p)$ — абсолютний максимум. Тоді $\min \tilde{a}_{s,r}$ є найменшим з усіх чисел $\min \tilde{a}_{s,k}$, $k \neq r$, і при $\tilde{a} = \min \tilde{a}_{s,r}$

Таблиця 2

Кумулянт $\kappa_{s,1}(p)$	$P_{s,\min k}$	$\min_k \kappa_{s,1}(p)$	$P_{s,\max k}$	$\max_k \kappa_{s,1}(p)$
$\kappa_{3,1}(p)$	0,78868	-0,7698	0,2113	0,7698
$\kappa_{4,1}(p)$	0,5	-2	0,09175	0,66667
			0,90825	0,66667
$\kappa_{5,1}(p)$	0,30098	-4,08589	0,04132	0,61009
	0,95868	-0,61009	0,69902	4,08589
$\kappa_{6,1}(p)$	0,18044	-7,68674	0,01915	0,57563
	0,81956	-7,68674	0,5	16
$\kappa_{7,1}(p)$			0,98085	0,57563
	0,10917	-13,91684	0,00907	0,55328
	0,65135	-52,26595	0,34865	52,26595
$\kappa_{8,1}(p)$	0,99093	-0,55328	0,89083	13,91684
	0,06686	-24,68772	0,00436	0,53818
	0,5	-272	0,24168	155,3495
	0,93314	-24,68772	0,75832	155,3495
			0,99564	0,53818

рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ має один корінь $\hat{p} = \hat{p}_{s,\min r}$, а при $\tilde{a} < \min \tilde{a}_{s,r}$ дійсних коренів немає.

Максимальну кількість дійсних коренів рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ отримаємо, якщо у формулі (13) для $\gamma_{s,0} > 0$ візьмемо найбільший локальний мінімум $\min_m \kappa_{s,1}(p)$, а для $\gamma_{s,0} < 0$ — найменший локальний максимум $\max_m \kappa_{s,1}(p)$ і задамо $\tilde{a} > \min \tilde{a}_{s,m}$. Тоді рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ має $s - 1$ корінь, якщо s — непарне, а для парних s воно має $s - 2$ кореня, якщо $\gamma_{s,0} > 0$, і s коренів, якщо $\gamma_{s,0} < 0$.

Нехай значення $\min \tilde{a}_{s,k}$ визначено. Тоді, задаючи різні значення параметра зсуву $\tilde{a} = \tilde{a}_l > \min \tilde{a}_{s,k}$, $l = 1, 2, 3, \dots$, можна отримати нескінченну кількість коренів $\hat{p}_{s,l} = p_s(\tilde{a}_l)$ рівняння (10), тобто нескінченну кількість моделей випадкових величин з нульовими кумулянтними коефіцієнтами $\gamma_s(p, \tilde{a})$ будь-яких порядків s .

Екстремуми коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$. З формули (8) видно, що $\kappa_{s,1}(0) = \kappa_{s,1}(1) = 0$ при $s \geq 2$, тому при будь-яких значеннях параметра зсуву $\tilde{a}$ з формули (9) отримуємо

$$\gamma_s(0, \tilde{a}) = \lim_{p \rightarrow 0} \gamma_s(p, \tilde{a}) = \gamma_{s,0}, \quad \gamma_s(1, \tilde{a}) = \lim_{p \rightarrow 1} \gamma_s(p, \tilde{a}) = \gamma_{s,0}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ мають екстремуми при певних значеннях $0 < p < 1$, які позначимо $\hat{p}_{s,m}$. Для отримання значень $\hat{p}_{s,m}$ знаходимо похідну

$$\frac{\partial \gamma_s(p, \tilde{a})}{\partial p} = \frac{\tilde{a}^s \kappa'_{s,1}(p)(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p)) - 0,5s\tilde{a}^2(\gamma_{s,0} + \tilde{a}^s \kappa_{s,1}(p))\kappa'_{2,1}(p)}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p))^{s/2+1}},$$

звідки отримуємо рівняння для обчислення $\hat{p}_{s,m}$:

$$\tilde{a}^s \kappa'_{s,1}(\hat{p}_{s,m})(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(\hat{p}_{s,m})) - 0,5s\tilde{a}^2(\gamma_{s,0} + \tilde{a}^s \kappa_{s,1}(\hat{p}_{s,m}))\kappa'_{2,1}(\hat{p}_{s,m}) = 0. \quad (14)$$

З формули (14) випливає, що для отримання значень вагового коефіцієнта $\hat{p}_{s,m}$, при яких кумулянтні коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ мають екстремуми, необхідно розв'язати алгебраїчне рівняння степеня $s + 1$.

Отримані результати свідчать про те що, оскільки існують проблеми аналітичного розв'язку алгебраїчних рівнянь (10), (14) степеня $s \geq 3$, на практиці для дослідження залежності коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ від вагового коефіцієнта p в загальному випадку необхідно застосовувати чисельні методи.

Аналіз залежності коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ від параметра зсуву $\tilde{a}$. Розглянемо дві задачі: проаналізуємо екстремуми коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ і визначимо значення параметра зсуву $\tilde{a}$, при яких $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$.

Екстремуми коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$. Для отримання значень параметра $\tilde{a}$, при яких коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ мають екстремуми, знаходимо похідну

$$\frac{\partial \gamma_s(p, \tilde{a})}{\partial \tilde{a}} = \frac{\tilde{a}s(\tilde{a}^{s-2}\kappa_{s,1}(p) - \gamma_{s,0}\kappa_{2,1}(p))}{(1 + \tilde{a}^2 \kappa_{2,1}(p))^{s/2+1}}. \quad (15)$$

Прирівнюючи чисельник виразу (15) до нуля, отримуємо рівняння для обчислення точок $\tilde{a}_{m,s}(p)$ екстремумів функції $\gamma_s(p, \tilde{a})$:

$$\tilde{a}_{m,s}^{s-2}(p) \kappa_{s,1}(p) - \gamma_{s,0} \kappa_{2,1}(p) = 0,$$

яке при $0 < p < 1$ має розв'язок

$$\tilde{a}_{m,s}(p) = \left(\gamma_{s,0} \frac{\kappa_{2,1}(p)}{\kappa_{s,1}(p)} \right)^{1/(s-2)}. \quad (16)$$

З формули (16) випливає, що для існування екстремумів функції $\gamma_s(p, \tilde{a})$ коефіцієнт $\gamma_{s,0}$ і кумулянт $\kappa_{s,1}(p)$ повинні мати однакові знаки. Знайдемо значення коефіцієнта $\gamma_s(p, \tilde{a})$ в точці $\tilde{a}_{m,s} = \tilde{a}_{m,s}(p)$. Приведемо формулу (16) до вигляду

$$\tilde{a}_{m,s} = \tilde{a}_{m,s}(p) = \left(\frac{1}{\kappa_{2,1}(p)} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_{s,0}}{\gamma_{s,1}(p)} \right)^{1/(s-2)}. \quad (17)$$

Підставляючи (17) в (9) та здійснюючи перетворення, знаходимо значення коефіцієнта $\gamma_s(p, \tilde{a})$ в точці $\tilde{a}_{m,s}$:

$$\gamma_s(p, \tilde{a}_{m,s}) = \frac{\gamma_{s,0} + \gamma_{s,1}(p)(\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{s/(s-2)}}{\left[1 + (\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{2/(s-2)} \right]^{s/2}}. \quad (18)$$

Покажемо наступне:

якщо $\kappa_{s,0} > 0$ і $\kappa_{s,1}(p) > 0$, то $\gamma_s(p, \tilde{a}_{m,s}) = \min_{\tilde{a}} \gamma_s(p, \tilde{a})$,

якщо $\kappa_{s,0} < 0$ і $\kappa_{s,1}(p) < 0$, то $\gamma_s(p, \tilde{a}_{m,s}) = \max_{\tilde{a}} \gamma_s(p, \tilde{a})$.

Для цього надамо формулі (18) вигляду

$$\begin{aligned} \gamma_s(p, \tilde{a}_{m,s}) &= \frac{\gamma_{s,0} \left[1 + (\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{2/(s-2)} \right]}{\left[1 + (\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{2/(s-2)} \right]^{s/2}} = \\ &= \frac{\gamma_{s,1}(p) \left[\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p) + (\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{s/(s-2)} \right]}{(\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{s/(s-2)} \left[(\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{-2/(s-2)} + 1 \right]^{s/2}} \end{aligned}$$

і запишемо остаточний вираз для отримання значення коефіцієнта $\gamma_s(p, \tilde{a}_{m,s})$ в точці $\tilde{a}_{m,s}$:

$$\begin{aligned}\gamma_s(p, \tilde{a}_{m,s}) &= \gamma_{s,0} \left[(\gamma_{s,0}/\gamma_{s,1}(p))^{2/(s-2)} + 1 \right]^{1-s/2} = \\ &= \gamma_{s,1}(p) \left[(\gamma_{s,1}(p)/\gamma_{s,0})^{2/(s-2)} + 1 \right]^{1-s/2}.\end{aligned}\quad (19)$$

Враховуючи, що

$$\gamma_s(p, 0) = \lim_{\tilde{a} \rightarrow 0} \gamma_s(p, \tilde{a}) = \gamma_{s,0}, \quad \gamma_s(p, \infty) = \lim_{\tilde{a} \rightarrow \infty} \gamma_s(p, \tilde{a}) = \gamma_{s,1}(p),$$

за допомогою (19) приходимо до таких висновків: якщо $\gamma_{s,0} > 0$ і $\gamma_{s,1}(p) > 0$, то

$$0 < \gamma_s(p, a_{m,s}) < \gamma_{s,0} = \gamma_s(p, 0) \text{ і } 0 < \gamma_s(p, a_{m,s}) < \gamma_{s,1}(p) = \gamma_s(p, \infty),$$

отже,

$$\gamma_s(p, a_{m,s}) = \min \gamma_s(p, a) > 0,$$

якщо $\gamma_{s,0} < 0$ і $\gamma_{s,1}(p) < 0$, то

$$0 > \gamma_s(p, a_{m,s}) > \gamma_{s,0} = \gamma_s(p, 0) \text{ і } 0 > \gamma_s(p, a_{m,s}) > \gamma_{s,1}(p) = \gamma_s(p, \infty),$$

отже,

$$\gamma_s(p, a_{m,s}) = \max \gamma_s(p, a) < 0.$$

Нулі коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$. Знайдемо значення параметра $\tilde{a}_{0,s}$, при якому $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$. З врахуванням (9) рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ набуває вигляду

$$\gamma_{s,0} + \tilde{a}_{0,s}^s \kappa_{s,1}(p) = 0, \quad (20)$$

звідки отримуємо

$$\tilde{a}_{0,s} = \tilde{a}_{0,s}(p) = \left(-\frac{\gamma_{s,0}}{\kappa_{s,1}(p)} \right)^{1/s}. \quad (21)$$

Оскільки $\tilde{a} > 0$, з формули (21) випливає, що коефіцієнт $\gamma_{s,0}$ і кумулянт $\kappa_{s,1}(p)$ повинні мати різні знаки. Задаючи різні значення вагового коефіцієнта p , при яких $\gamma_{s,0}$ і $\kappa_{s,1}(p)$ мають протилежні знаки, можна отримати нескінченну кількість розв'язків рівняння (20), тобто нескін-

ченну кількість моделей випадкових величин з нульовими кумулянтними коефіцієнтами $\gamma_s(p, \tilde{a})$ будь-яких порядків s .

Приклад. Нехай випадкова величина ξ_0 має розподіл Гумбеля типу 1 (розподіл мінімального значення), щільність імовірностей якого має вигляд [22]

$$p_0(x) = \beta \exp[\beta(x - \mu) - \exp(\beta(x - \mu))], \quad x \in (-\infty; \infty), \quad (22)$$

де $\mu \in (-\infty; \infty)$ — параметр положення (мода); $\beta > 0$ — параметр масштабу. Математичне сподівання $\mathbf{M}\xi_0$, дисперсія $\mathbf{D}\xi_0$, коефіцієнти асиметрії $\gamma_{3,0}$ та ексцесу $\gamma_{4,0}$ величини ξ_0 наступні: $\mathbf{M}\xi_0 = m_0 = \mu - \gamma/\beta$, $\gamma \approx 0,57722$ — стала Ейлера, $\mathbf{D}\xi_0 = \sigma_0^2 = \pi^2/6\beta^2$, $\gamma_{3,0} \approx -1,13955$, $\gamma_{4,0} = 2,4$.

Задамо значення параметрів $\mu = 0$, $\sigma_0 = 1$. Тоді $\beta = \pi/\sqrt{6}$, $m_0 = -\gamma\sqrt{6}/\pi$, $\tilde{a} = a$ і щільність імовірностей двокомпонентної суміші зсунутих розподілів (22) визначається виразом

$$p(x) = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left\{ q \exp \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}}(x+a) - \exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}(x+a) \right) \right] + \right. \\ \left. + p \exp \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}}(x-a) - \exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}(x-a) \right) \right] \right\}. \quad (23)$$

Розглянемо задачу дослідження коефіцієнтів асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ та ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ суміші (23), які за формулами (8), (9) мають вигляд

$$\gamma_3(p, \tilde{a}) = \frac{-1,13955 + 8\tilde{a}^3(p - 3p^2 + 2p^3)}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^{3/2}}, \quad (24)$$

$$\gamma_4(p, \tilde{a}) = \frac{2,4 + 16\tilde{a}^4(p - 7p^2 + 12p^3 - 6p^4)}{(1 + 4\tilde{a}^2(p - p^2))^2}, \quad (25)$$

а також дослідимо залежність коефіцієнтів асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ та ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ від вагового коефіцієнта p та їх залежність від параметра зсуву $\tilde{a}$.

Рис. 2. Графіки залежності від p коефіцієнта асиметрії (a) та коефіцієнта ексцесу (b) при $\tilde{a} = 1$ (суцільна лінія) і $\tilde{a} = 1,2$ (штрихова лінія)

Аналіз залежності коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ від вагового коефіцієнта p .

За формулами (24), (25) отримуємо

$$\gamma_3(0, \tilde{a}) = \gamma_3(1, \tilde{a}) = \gamma_{3,0} = -1,13955,$$

$$\gamma_4(0, \tilde{a}) = \gamma_4(1, \tilde{a}) = \gamma_{4,0} = 2,4.$$

Використовуючи (13) і дані табл. 2, знаходимо мінімальні значення параметра $\tilde{a}$, при яких рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$, $s = 3, 4$, має дійсні корені:

$$\min \tilde{a}_3 = (-\gamma_{3,0} / \max \kappa_{3,1}(p))^{1/3} = (1,13955 / 0,7698)^{1/3} = 1,1397,$$

$$\min \tilde{a}_4 = (-\gamma_{4,0} / \min \kappa_{4,1}(p))^{1/4} = (2,4 / 2)^{1/4} = 1,0466.$$

Розглянемо значення $\tilde{a} = 1 < \min \tilde{a}_s$ і $\tilde{a} = 1,2 > \min \tilde{a}_s$, $s = 3, 4$. На рис. 2 наведено графіки залежності коефіцієнта асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ та коефіцієнта ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ від p . Використовуючи формули (24), (25), знайдемо на інтервалі $p \in (0, 1)$ чисельними методами дійсні корені $\hat{p}_{s,k}$ рівняння $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$ і значення $\hat{p}_{s, \max k}$, $\hat{p}_{s, \min k}$, при яких коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ мають максимуми $\max_k \gamma_s = \gamma_s(\hat{p}_{s, \max k}; \tilde{a})$ і мінімуми $\min_k \gamma_s = \gamma_s(\hat{p}_{s, \min k}; \tilde{a})$.

Для коефіцієнта асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ при $\tilde{a} = 1$ дійсні корені $\hat{p}_{3,k}$ відсутні; $\hat{p}_{3, \max 1} = 0,23749$, $\max_1 \gamma_3 = -0,16736$, $\hat{p}_{3, \min 1} = 0,97617$,

Рис. 3. Графіки щільності ймовірностей (23) з нульовими коефіцієнтами асиметрії $\gamma_3(p, a)$ (а) та нульовими коефіцієнтами ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ (б): а — при $\tilde{a} = 1, 2$, $p = \hat{p}_{3,1} = 0,12618$ (суцільна лінія) і $p = \hat{p}_{3,2} = 0,30587$ (штрихова лінія); б — при $\tilde{a} = 1, 2$, $p = \hat{p}_{4,1} = 0,33023$ (суцільна лінія) і $p = \hat{p}_{4,2} = 0,66977$ (штрихова лінія)

$\min_1 \gamma_3 = -1,15227$. При $\tilde{a} = 1, 2$ корені рівняння $\gamma_3(p, \tilde{a}) = 0$ такі: $\hat{p}_{3,1} = 0,12618$, $\hat{p}_{3,2} = 0,30587$; $\hat{p}_{3,\max 1} = 0,20097$, $\max_1 \gamma_3 = 0,07042$, $\hat{p}_{3,\min 1} = 0,95944$, $\min_1 \gamma_3 = -1,20633$.

Для коефіцієнта ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ при $\tilde{a} = 1$ дійсні корені $\hat{p}_{4,k}$ відсутні; $\hat{p}_{4,\min 1} = 0,5$, $\min_1 \gamma_3 = 0,1$. При $\tilde{a} = 1, 2$ корені рівняння $\gamma_4(p, \tilde{a}) = 0$ такі: $\hat{p}_{4,2} = 0,66977$; $\hat{p}_{4,\min 1} = 0,5$, $\min_1 \gamma_4 = -0,29347$, $\hat{p}_{4,\max 1} = 0,00947$, $\hat{p}_{4,\max 2} = 0,99053$, $\max_1 \gamma_4 = \max_2 \gamma_4 = 2,42462$.

На рис. 3 подано графіки щільності ймовірностей (23) з нульовими коефіцієнтами асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ та нульовими коефіцієнтами ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$.

Аналіз залежності коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ від параметра зсуву $\tilde{a}$.

Розглянемо задачу отримання моделей несиметричних розподілів з нульовим коефіцієнтом асиметрії і негаусових розподілів з нульовим коефіцієнтом ексцесу. Використовуючи формулу (21) і дані табл. 1 і 2, знаходимо параметри зсуву $\tilde{a}_{0,s}(p)$, при яких $\gamma_s(p, \tilde{a}) = 0$, $s = 3; 4$:

$$\tilde{a}_{0,3}(p) = \left(\frac{1,13955}{\kappa_{3,1}(p)} \right)^{1/3}, \quad 0 < p < 0,5, \quad (26)$$

$$\tilde{a}_{0,4}(p) = \left(-\frac{2,4}{\kappa_{4,1}(p)} \right)^{1/4}, \quad 0,21133 < p < 0,78868. \quad (27)$$

Задаючи різні значення коефіцієнта p , за якими $\kappa_{3,1}(p) > 0$, $\kappa_{4,1}(p) < 0$, можна отримати різні моделі несиметричних розподілів з нульовими коефіцієнтами асиметрії і негаусових розподілів з нульовими коефіцієнтами ексцесу. У табл. 3 наведено розраховані за формулами (8) значення кумулянтів $\kappa_{s,1}(p)$, $s = \overline{1,4}$, на інтервалі $0 \leq p \leq 0,5$ і значення параметрів зсуву $\tilde{a}_{0,3}(p)$, $\tilde{a}_{0,4}(p)$, розраховані за формулами (26), (27).

Задамо два значення: $p = 0,25$ і $p = 0,45$. На рис. 4 наведено графіки залежності від $\tilde{a}$ коефіцієнта асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ та коефіцієнта ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$.

На рис. 5 показано графіки щільності ймовірностей (23) з нульовими коефіцієнтами асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ та нульовими коефіцієнтами ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$.

Моделювання двокомпонентних сумішей зсунутих розподілів. Розглянемо особливості комп'ютерного моделювання випадкових величин (4) з щільністю ймовірностей (5). Нехай задано розподіл $p_0(x)$ випадкової величини ξ_0 , у якої $\mathbf{M}\xi_0 = \kappa_{1,0} = m_0$ і $\mathbf{D}\xi_0 = \kappa_{2,0} = \sigma_0^2$. По-

Таблиця 3

p	Кумулянт $\kappa_{s,1}(p)$				Параметр зсуву $a_{0,s}(p)$	
	$\kappa_{1,1}(p)$	$\kappa_{2,1}(p)$	$\kappa_{3,1}(p)$	$\kappa_{4,1}(p)$	$a_{0,3}(p)$	$a_{0,4}(p)$
0	-1	0	0	0	Не існує	Не існує
0,05	-0,9	0,19	0,342	0,5434	1,49361	" "
0,1	-0,8	0,36	0,576	0,6624	1,25537	" "
0,15	-0,7	0,51	0,714	0,4794	1,16863	" "
0,2	-0,6	0,64	0,768	0,1024	1,14058	" "
0,25	-0,5	0,75	0,75	-0,375	1,14963	1,59054
0,3	-0,4	0,84	0,672	-0,8736	1,19249	1,28743
0,35	-0,3	0,91	0,546	-1,3286	1,27795	1,15932
0,4	-0,2	0,96	0,384	-1,6896	1,43704	1,09171
0,45	-0,1	0,99	0,198	-1,9206	1,79207	1,05729
0,5	0	1	0	-2	Не існує	1,04664

Рис. 4. Графіки залежності від параметра a коефіцієнта асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ (а) та коефіцієнта ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ (б) при $p = 0,25$ (суцільна лінія) і $p = 0,45$ (штрихова лінія)

Рис. 5. Графіки щільності ймовірностей (23) з нульовими коефіцієнтами асиметрії $\gamma_3(p, \tilde{a})$ (а) та нульовими коефіцієнтами ексцесу $\gamma_4(p, \tilde{a})$ (б): а — при $p = 0,25$, $\tilde{a} = 1,14963$ (суцільна лінія) і $p = 0,45$, $\tilde{a} = 1,79207$ (штрихова лінія); б — при $p = 0,25$, $\tilde{a} = 1,59054$ (суцільна лінія) і $p = 0,45$, $\tilde{a} = 1,05729$ (штрихова лінія)

значимо $\xi_R[0; 1]$ випадкову величину, що рівномірно розподілена на інтервалі $[0; 1]$ та не залежить від ξ_0 . Тоді при заданих значеннях параметрів p і a комп'ютерне моделювання випадкової величини (4) зі щільністю ймовірностей (5) зводиться до моделювання випадкових величин ξ_0 і $\xi_R[0; 1]$, а потім моделювання суми

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 = \xi_0 + a \operatorname{sign}(p - \xi_R[0; 1]). \quad (28)$$

Формула (28) дозволяє моделювати випадкову величину ξ , у якої

$$\mathbf{M}\xi = m_\xi = \kappa_1 = \kappa_{1,0} + \kappa_{1,1} = m_0 + a(2p-1);$$

$$\mathbf{D}\xi = \sigma_\xi^2 = \kappa_2 = \kappa_{2,0} + \kappa_{2,1} = \sigma_0^2 + 4a^2(p-p^2).$$

Для комп'ютерного моделювання випадкової величини η з заданим математичним сподіванням $m_\eta = \mathbf{M}\eta$ і дисперсією $\sigma_\eta^2 = \mathbf{D}\eta$ необхідно здійснити лінійне перетворення випадкової величини ξ :

$$\eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} (\xi - m_\xi) + m_\eta.$$

Щільності ймовірностей $p_\eta(x)$ і $p_\xi(x)$ випадкових величин η і ξ пов'язані між собою виразом

$$p_\eta(x) = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} p_\xi \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} (x - m_\eta) + m_\xi \right]. \quad (29)$$

Підставляючи (29) в формулу (5), отримуємо вираз для щільності ймовірностей $p_\eta(x)$ випадкової величини η з заданими m_η і σ_η^2 :

$$p_\eta(x) = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \left\{ qp_0 \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} (x - m_\eta) + m_\xi + a \right] + \right. \\ \left. + pp_0 \left[\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} (x - m_\eta) + m_\xi - a \right] \right\}. \quad (30)$$

Якщо $m_\eta = 0$ і $\sigma_\eta = 1$, то $\eta = \tilde{\xi}$ – стандартизована випадкова величина

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} = \frac{\xi_0 + \xi_1 - m_0 - a(2p-1)}{(\sigma_0^2 + 4a^2(p-p^2))^{1/2}}. \quad (31)$$

Згідно з (30) щільність ймовірностей $\tilde{p}(x)$ випадкової величини (31) має вигляд

$$\tilde{p}(x) = \sigma_\xi p_\xi(\sigma_\xi x + m_\xi) = \\ = \sigma_\xi \left[qp_0(\sigma_\xi x + m_\xi + a) + pp_0(\sigma_\xi x + m_\xi - a) \right].$$

Висновки

Кумулянтні коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ двокомпонентних сумішей зсунутих розподілів є функцією двох змінних — вагового коефіцієнта p і параметра зсуву $\tilde{a}$, та в залежності від їх значень можуть бути від’ємними, додатними або дорівнювати нулю. Якщо розглядати кумулянтні коефіцієнти $\gamma_s(p, \tilde{a})$ як функції вагового коефіцієнта p , то для отримання нулів і екстремумів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ на практиці необхідно застосовувати чисельні методи. Розгляд коефіцієнтів $\gamma_s(p, \tilde{a})$ як функції параметра зсуву $\tilde{a}$ дозволяє аналітично знаходити значення параметра зсуву, при яких кумулянтні коефіцієнти суміші мають екстремуми і нулі.

Отримані результати дають змогу на практиці здійснювати математичне і комп’ютерне моделювання широкого класу негаусових випадкових величин, у яких кумулянтні коефіцієнти будь-яких порядків дорівнюють нулю. Зокрема, на прикладі суміші розподілів Гумбеля типу 1 побудовано моделі несиметричних розподілів з нульовими коефіцієнтами асиметрії і негаусових розподілів з нульовими коефіцієнтами ексцесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. McLachlan G., Peel D. Finite mixture models. New York: John Wiley & Sons, 2000, 438 p.
2. Chauveau D., Garel B., Mercier S. Testing for univariate two-component Gaussian mixture in practice // Journal de la société française de statistique, 2019, **160**, No. 1, pp. 86-113.
3. Kalantan Z.I., Alrewely F. A 2-Component Laplace Mixture Model: Properties and Parametric Estimations // Mathematics and Statistics, 2019, **7**, No. 4A, pp. 9-16. DOI: 10.13189/ms.2019.070702
4. Sindhu T.N., Feroze N., Aslam M. Bayesian Estimation of the Parameters of Two-Component Mixture of Rayleigh Distribution under Doubly Censoring // Journal of Modern Applied Statistical Methods, 2014, **13**, No. 2, pp. 259-286. DOI: 10.22237/jmasm/1414815180
5. Evin G., Merleau J., Perreault L. Two-component mixtures of normal, gamma, and Gumbel distributions for hydrological applications // Water Resour. Res., 2011, **47**, W08525, 21 p. DOI:10.1029/2010WR010266
6. Uma maheswari R., Leo Alexander T. Mixture of identical distributions of exponential, gamma, lognormal, weibull, gompertz approach to heterogeneous survival data // International Journal of Current Research, 2017, **9**, Issue 09, pp. 57521-57532.
7. Shin J.-Y., Lee T., Ouarda T.B.M.J. Heterogeneous Mixture Distributions for Modeling Multisource Extreme Rainfalls // Journal of hydrometeorology, 2015, **16**, No. 6, pp. 2639–2657. DOI: 10.1175/JHM-D-14-0130.1
8. Türkan A.H., Çalıř N. Comparison of two-component mixture distribution models for heterogeneous survival datasets: a review study // ISTATISTIK: Journal of the Turkish Statistical Association, 2014, **7**, No. 2, p. 33-42.

9. Uma maheswari R., Leo Alexander T. Two-component of Non-Identical Mixture Distribution Models for heterogeneous Survival Data // International Journal of Recent Scientific Research, 2017, **8**, Issue 10, pp. 20813-20824. DOI: <http://dx.doi.org/10.24327/ijrsr.2017.0810.0965>
10. Красильников А.И., Пилипенко К.П. Применение двухкомпонентной гауссовской смеси для идентификации одновершинных симметричных плотностей вероятностей // Электроника и связь, 2008, № 5 (46), с. 20—29.
11. Красильников А.И. Анализ коэффициента эксцесса засоренных гауссовских распределений // Электрон. моделирование, 2017, **39**, № 4, с. 19—30.
12. Красильников А.И. Анализ кумулянтных коэффициентов двухкомпонентных смесей сдвинутых гауссовых распределений с равными дисперсиями // Электрон. моделирование, 2020, **42**, № 3, с. 71—88. DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.03.071>
13. Чепинога А.В. Области реалізації бігаусових моделей асиметрично-ексцесних випадкових величин з перфорованим моментно-кумулянтним описом // Вісник ЧДТУ, 2010, № 2, с. 91—95.
14. Sulewski P. Two-piece power normal distribution // Communications in Statistics – Theory and Methods, 2021, Vol. 50, Issue 11, pp. 2619–2639. DOI: 10.1080/03610926.2019.1674871
15. Krasil'nikov A.I. Class non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis // Radioelectronics and Communications Systems, 2013, **56**, No. 6, pp. 312-320.
16. Красильников А.И. Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса // Электрон. моделирование, 2017, **39**, № 1, с. 3—17.
17. Красильников А.И. Модели несимметричных распределений случайных величин с нулевым коэффициентом асимметрии // Там же, 2016, **38**, № 1, с. 19—33.
18. Кунченко Ю.П., Заболотний С.В., Коваль В.В., Чепинога А.В. Моделирование эксцесных випадкових величин із заданим кумулянтним описом на основі бігаусового розподілу // Вісник ЧДТУ, 2005, № 1, с. 38—42.
19. Rubio F.J., Ogundimu E.O., Hutton J.L. On modelling asymmetric data using two-piece sinh-arcsinh distributions // Brazilian Journal of Probability and Statistics, 2016, **30**, No. 3, pp. 485–501. DOI: 10.1214/15-BJPS290
20. Красильников А.И. Применение двухкомпонентных смесей сдвинутых распределений для моделирования перфорированных случайных величин // Электрон. моделирование, 2018, **40**, № 6, с. 83—98. DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.40.06.083>
21. Красильников А.И. Моделирование перфорированных случайных величин на основе смесей сдвинутых распределений // Там же, 2018, **40**, № 1, с. 47—61.
22. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001, 295 с.

Отримано 09.06.21

REFERENCES

1. McLachlan, G. and Peel, D. (2000), Finite mixture models, John Wiley&Sons, New York, USA.
2. Chauveau, D., Garel, B. and Mercier, S. (2019), “Testing for univariate two-component Gaussian mixture in practice”, *Journal de la société française de statistique*, Vol. 160, no. 1, pp. 86-113.
3. Kalantan, Z.I. and Alrewely, F. (2019), “A 2-Component Laplace Mixture Model: Properties and Parametric Estimations”, *Mathematics and Statistics*, Vol. 7, no. 4A, pp. 9-16. DOI: 10.13189/ms.2019.

4. Sindhu, T.N., Feroze, N. and Aslam, M. (2014), "Bayesian Estimation of the Parameters of Two-Component Mixture of Rayleigh Distribution under Doubly Censoring", *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, Vol. 13, no. 2, pp. 259-286. DOI: 10.22237/jmasm/1414815180.
5. Evin, G., Merleau, J. and Perreault, L. (2011), "Two-component mixtures of normal, gamma, and Gumbel distributions for hydrological applications", *Water Resources Research*, Vol. 47, no. 8, p. 1-21. DOI:10.1029/2010WR010266.
6. Uma Maheswari, R. and Leo Alexander, T. (2017), "Mixture of identical distributions of exponential, gamma, lognormal, weibull, gompertz approach to heterogeneous survival data", *International Journal of Current Research*, Vol. 9, no. 9, pp. 57521-57532.
7. Shin, J.-Y., Lee, T. and Ouarda, T.B.M.J. (2015), "Heterogeneous Mixture Distributions for Modeling Multisource Extreme Rainfalls", *Journal of hydrometeorology*, Vol. 16, no. 6, pp. 2639-2657. DOI: 10.1175/JHM-D-14-0130.1.
8. Türkan, A.H. and Çalıř, N. (2014), "Comparison of two-component mixture distribution models for heterogeneous survival datasets: a review study", *ISTATISTIK: Journal of the Turkish Statistical Association*, Vol. 7, no. 2, pp. 33-42.
9. Uma Maheswari, R. and Leo Alexander, T. (2017), "Two-component of Non-Identical Mixture Distribution Models for heterogeneous Survival Data", *International Journal of Recent Scientific Research*, Vol. 8, no. 10, pp. 20813-20824. DOI: <http://dx.doi.org/10.24327/ijrsr.2017.0810.0965>.
10. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P. (2008), "Application of a two-component Gaussian mixture to identify single-peak symmetric probability density functions", *Elektronika i sviaz*, Vol. 5, no. 46, pp. 20-29.
11. Krasilnikov, A.I. (2017), "Analysis of the kurtosis coefficient of contaminated gaussian distributions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 4, pp. 19-30.
12. Krasilnikov, A.I. (2020), "Analysis of cumulant coefficients of two-component mixtures of shifted gaussian distributions with equal variances", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 42, no. 3, pp. 71-88. DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.03.071>.
13. Chepynoha, A.V. (2010), "Areas of realization of bi-Gaussian models of skewness-excess random variables with the punched moment-cumulant description", *Visnyk ChDTU*, Vol. 2, pp. 91-95.
14. Sulewski, P. (2021), "Two-piece power normal distribution", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 50, no. 11, pp. 2619-2639. DOI: 10.1080/03610926.2019.1674871.
15. Krasilnikov, A.I. (2013), "Class non-Gaussian distributions with zero skewness and kurtosis", *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 56, no. 6, pp. 312-320.
16. Krasilnikov, A.I. (2017), "Class of non-gaussian symmetric distributions with zero coefficient of kurtosis", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 3-17.
17. Krasilnikov, A.I. (2016), "Models of asymmetrical distributions of random variables with zero asymmetry coefficient", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 19-33.
18. Kunchenko, Yu.P., Zabolotnii, S.V., Koval, V.V. and Chepynoha, A.V. (2005), "Simulation of excess random variables with given cumulative description based on bi-Gaussian distribution", *Visnyk ChDTU*, Vol. 1, pp. 38-42.
19. Rubio, F.J., Ogundimu, E.O. and Hutton, J.L. (2016), "On modelling asymmetric data using two-piece sinh-arcsinh distributions", *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Vol. 30, no. 3, pp. 485-501. DOI: 10.1214/15-BJPS290.

20. Krasilnikov, A.I. (2018), "The application of two-component mixtures of shifted distributions for modeling perforated random variables", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 40, no. 6, pp. 83-98. DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.40.06.083>.
21. Krasilnikov, A.I. (2018), "Modeling of perforated random variables on the basis of mixtures of shifted distributions", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 40, no. 1, pp 47-61.
22. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Directory on Probabilistic Distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Received 09.06.21

A.I. Krasilnikov

ANALYSIS OF CUMULANT
COEFFICIENTS OF TWO-COMPONENT MIXTURES
OF SHIFTED NON-GAUSSIAN DISTRIBUTIONS

The dependence of the cumulant coefficients of two-component mixtures of shifted non-Gaussian distributions on the weight coefficient is analyzed and conditions are determined under which the cumulant coefficients of any orders are equal to zero. The dependence of the cumulant coefficients of two-component mixtures on the shear parameter is investigated and the parameter values are determined at which the cumulant coefficients of any orders have extrema and zeros. The dependence of the skewness and excess kurtosis of a two-component mixture of shifted Gumbel distributions of type 1 on the weight coefficient and the shear parameter is investigated and their values are obtained at which the skewness and excess kurtosis of the mixture are equal to zero. The features of computer modeling of random variables, the probability density of which is a two-component mixture of shifted distributions, are considered.

Key words: non-Gaussian distributions, two-component mixtures of distributions, cumulant analysis, cumulant coefficients, asymmetry coefficient, excess coefficient.

КРАСИЛЬНИКОВ Олександр Іванович, канд. фіз.-мат. наук, доцент, провідн. наук. співробітник Інституту технічної теплофізики НАН України. У 1973 р. закінчив Київський політехнічний інститут. Область наукових досліджень – математичні моделі, імовірнісні характеристики і методи статистичної обробки флуктуаційних сигналів в системах шумової діагностики.