DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.43.06.019>
УДК 536.24

В.І. Гавриш, д-р техн. наук
Національний університет «Львівська політехніка»
Україна, 79013, Львів, вул. С. Бандери, 12
тел. (032) 2582578, e-mail: gavryshvasyl@gmail.com

Математичні моделі температурного поля в термочутливих елементах електронних пристроїв

Розроблено нелінійні математичні моделі температурних режимів у термочутливій ізотропній пластині, яка нагрівається локально зосередженими джерелами тепла. Теплоактивні зони пластини описано з використанням теорії узагальнених функцій. З огляду на це рівняння теплопровідності та крайові умови містять розривні та сингулярні праві частини. За допомогою перетворення Кірхгофа лінеаризовано вихідні нелінійні рівняння теплопровідності та нелінійні крайові умови. Для розв'язування отриманих крайових задач використано інтегральне перетворення Фур'є і визначено їх аналітичні розв'язки в зображеннях. До цих розв'язків застосовано обернене інтегральне перетворення Фур'є, яке дало змогу отримати аналітичні вирази для визначення змінної Кірхгофа. Як приклад обрано лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, яку часто використовують у багатьох практичних задачах. У результаті отримано аналітичні співвідношення для визначення температури в термочутливій пластині. Наведені аналітичні розв'язки подано у вигляді невластних збіжних інтегралів. За методом Ньютона (трьох восьмих) отримано числові значення цих інтегралів з певною точністю для заданих значень товщини пластини, просторових координат, питомої потужності джерел тепла, коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів пластини та геометричних параметрів теплоактивної зони. Матеріалами пластини є кремній та германій. Для визначення числових значень температури в наведеній конструкції, а також аналізу теплообмінних процесів в середині пластини, зумовлених локальним нагріванням, розроблено програмні засоби, із використанням яких виконано геометричне відображення розподілу температури залежно від просторових координат, коефіцієнта теплопровідності, питомої густини теплового потоку.

К л ю ч о в і с л о в а: температурне поле, ізотропна термочутлива пластина, теплопровідність, теплоізолювана поверхня, ідеальний тепловий контакт, локальне нагрівання.

Для сучасного суспільства характерним є високий рівень використання різноманітних електронних пристроїв, які експлуатують у певних температурних режимах. Це зумовлює необхідність забезпечення надійної роботи, зменшення ваги і габаритів (мініатюризації), збільшення терміну

© Гавриш В.І., 2021

Рис. 1. Діаграма впливу різних зовнішніх чинників на надійність роботи мікроелектронних пристроїв: 1 — вологість — 19,00 %; 2 — пил — 6,00 %; 3 — вібрація — 20,00 %; 4 — температура — 55,00 %

служби. Внаслідок мініатюризації пристроїв та їх елементів у невеликих об'ємах концентруються високі потужності тепловиділення. При експлуатації мікроелектронні пристрої піддаються впливу внутрішніх і зовнішніх теплових потоків. Тому задача визначення

температурних полів та аналізу температурних режимів у окремих елементах та вузлах електронних пристроїв є надзвичайно актуальною, оскільки саме температура є вагомим фактором, який суттєво впливає на ефективність їх роботи.

На рис. 1 наведено діаграму впливу різних зовнішніх чинників на надійність роботи мікроелектронних пристроїв. Дослідження свідчать, що кількість відмов при експлуатації мікроелектронних пристроїв тісно пов'язана з рівнем температури. Так, для германієвих елементів кількість відмов при температурі 140 °C у 7,5 разів більша, ніж при температурі 20 °C. Ще більшою вона є для кремнієвих елементів.

Температурний рівень у елементах мікроелектронних пристроїв може зростати через підвищення температури довкілля, нагрівання від сусідніх елементів, які виділяють тепло, теплової потужності самих елементів та пристроїв. Тому моделювання процесів поширення тепла у різних конструкціях та їх елементах є важливим напрямком теоретичних та практичних досліджень. Відомо, що елементи сучасних електронних пристроїв піддаються впливу внутрішнього нагрівання в результаті експлуатації. Саме тому задачі математичного моделювання процесів, пов'язаних із теплоперенесенням, не втрачають актуальності донині, адже аналіз розв'язків таких задач має велике наукове, практичне, а також економічне значення.

Експериментальні дослідження полів температури у різних конструкціях, і зокрема у мікроелектронних пристроях, не завжди дають можливість отримати необхідні результати для аналізу теплової поведінки пристрою. Варто зазначити, що у багатьох випадках такі експерименти є просто неможливими. Тому математичне моделювання процесів, пов'язаних із теплообміном, є важливим напрямком наукових досліджень. Вагомим аспектом моделювання та аналізу процесу теплопровідності у елементах конструкцій, зокрема мікроелектронних пристроїв, є врахування впливу внутрішніх джерел тепла.

Отже, проблема розроблення нових математичних моделей для однорідних та неоднорідних середовищ, а також удосконалення розроблених математичних моделей для аналізу процесу теплопровідності та теплообміну і надалі залишається актуальною.

Аналіз основних літературних джерел. Визначення температурних режимів в однорідних і неоднорідних конструкціях привертає увагу багатьох дослідників [1—6].

У роботі [7] описано ізотропні пологі тонкі оболонки, що нагріваються внутрішніми джерелами тепла, зосередженими у квадраті та еліпсі, на межових поверхнях яких відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем. Задачу теплопровідності розв'язано за умов, коли температура навколишнього середовища є сталою, а на безмежності прямує до нуля. Теплові джерела з інтенсивністю, що дорівнює одиниці, розміщено на серединній поверхні, де обрано початок системи координат. Об'ємну густину джерел нагрівання описано за допомогою двовимірної функції Дірака. Досліджено поведінку температурного поля у середовищі та залежність температури від відстані до джерел тепла.

У роботі [8] наведено інженерну методику дослідження теплових режимів у елементах та вузлах конструкцій радіоелектронної апаратури, що ґрунтується на розв'язанні рівняння теплопровідності для прямокутного паралелепіпеда з джерелами тепла такої ж геометричної форми. Розроблені модель та алгоритм визначення і аналізу теплових режимів в елементах конструкцій (стійка, блок, мікросхема електронної апаратури) дає можливість отримати значення температури у довільній точці структури в аналітичному вигляді. Із розв'язку рівняння теплопровідності отримано співвідношення для визначення ефективної теплопровідності елементів конструкції вздовж основних координатних осей із врахуванням максимально заданого їх перегрівання.

У роботах [9—11] удосконалено існуючі та описано нові розроблені підходи до створення математичних моделей аналізу теплообміну між кусково-однорідними конструкціями та навколишнім середовищем і методів розв'язування лінійних і нелінійних крайових задач для кусково-однорідних середовищ. Розглянуто дво- та тривимірні моделі, що містять рівняння, коефіцієнти яких є функціями теплофізичних властивостей фаз і геометричної структури. Наведено методи визначення аналітичних та аналітично-числових розв'язків крайових задач теплопровідності. Досліджено та проаналізовано теплообмінні процеси в однорідних та шаруватих конструкціях із чужорідними включеннями канонічної форми.

У роботах [12, 13] наведено загальні рівняння теплопровідності для неоднорідних середовищ.

Рис. 2. Ізотропна пластина з внутрішніми джерелами тепла

Огляд основних літературних джерел засвідчив, що малодослідженими та нерозробленими залишилися моделі, які б враховували інтенсивні температурні збурення у конструкціях, зумовлені локально зосередженими джерелами тепла. Це спонукає до розроблення математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у елементах складних електронних і електромеханічних систем, які функціонують у подібних температурних режимах. Результати досліджень теплообміну в таких конструкціях використовують надалі для проектування наведених систем щодо їх термостійкості.

Об'єкт дослідження та його чотири математичні моделі. 1. Розглянемо ізотропну відносно теплофізичних параметрів термочутливу (теплофізичні параметри конструкційного матеріалу залежать від температури) пластину товщиною 2δ з теплоізованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) (рис. 2). У пластині в об'ємі паралелепіпеда $V = 8hd\delta$ діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю $q_0 = \text{const}$. На межових поверхнях пластини

$$K_1 = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\},$$

$$K_2 = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$$

задано крайові умови другого роду.

У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y , який отримуємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [12, 13]

$$\text{div}(\lambda(t) \text{grad} t(x, y)) = -q_0 S_-(h - |x|) \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=l} = 0, \quad (2)$$

де $\lambda(t)$ — коефіцієнт теплопровідності термочутливої пластини; $S_-(\zeta)$ — асиметрична одинична функція [14],

$$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Введемо перетворення Кірхгофа [12, 13]

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{\lambda^0} \int_0^{t(x,y)} \lambda(\zeta) d\zeta. \quad (3)$$

Тут λ^0 — опорний коефіцієнт теплопровідності термочутливої пластини. Продиференціюємо вираз (3) за змінними x та y . У результаті отримаємо співвідношення

$$\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial y} = \lambda^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial y}. \quad (4)$$

Після їх підстановки в (1) одержимо лінійне диференціальне рівняння відносно функції $\vartheta(x, y)$:

$$\Delta \vartheta = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(h - |x|), \quad (5)$$

де Δ — оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Крайові умови для функції $\vartheta(x, y)$ із використанням співвідношень (3), (4) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{|y|=l} = 0. \quad (6)$$

Отже, із використанням (3) нелінійну крайову задачу теплопровідності (1), (2) зведено до лінійної задачі (5), (6).

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (5) і крайових умов (6), приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{2q_0}{\sqrt{2\pi} \lambda^0 \xi^3} \sin \xi h \quad (7)$$

з крайовою умовою

$$\left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=l} = 0, \quad (8)$$

де $\bar{\vartheta}(y)$ — трансформанта функції $\vartheta(x, y)$,

$$\bar{\vartheta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi y} \vartheta(x, y) d\xi;$$

ξ — параметр інтегрального перетворення Фур'є, $i^2 = -1$.

Загальний розв'язок рівняння (7) знайдемо за допомогою методу варіації сталих у вигляді

$$\bar{\vartheta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y} + \frac{2q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi \xi^3}} \sin \xi h,$$

де c_1, c_2 — сталі інтегрування. Використавши крайову умову (8) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задачі (7), (8), а саме

$$\bar{\vartheta} = \frac{2q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi \xi^3}} \sin \xi h. \quad (9)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (9), одержимо вираз для визначення змінної Кірхгофа:

$$\vartheta(x) = \frac{2q_0}{\lambda^0 \pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{\xi^3} \sin \xi h d\xi. \quad (10)$$

Шукане температурне поле для термочутливої пластини визначаємо за допомогою нелінійного рівняння, яке отримується з використанням співвідношень (3), (10) після підстановки в них конкретного виразу залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційного матеріалу від температури.

2. Розглянемо випадок, коли геометричні параметри теплоактивного паралелепіпеда h, δ є малими порівняно з шириною пластини $2l$. Температурне поле у такому середовищі визначаємо за допомогою розв'язку нелінійного рівняння теплопровідності [12, 13]

$$\operatorname{div}(\lambda(t) \operatorname{grad} t(x, y)) = -q_0 \delta(x). \quad (11)$$

Тут $\delta(\zeta)$ — дельта-функція Дірака,

$$\delta(\zeta) = \frac{dS(\zeta)}{d\zeta};$$

$S(\zeta)$ — симетрична одинична функція [14],

$$S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Застосуємо до рівняння (11) перетворення Кірхгофа (3), внаслідок чого отримаємо

$$\Delta \vartheta = -\frac{q_0}{\lambda^0} \delta(x). \quad (12)$$

Використавши до (12) інтегральне перетворення Фур'є за координатою x , отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = -\frac{q_0}{\sqrt{2\pi} \lambda^0},$$

розв'язок якого із урахуванням крайової умови (8) має вигляд

$$\bar{\vartheta} = \frac{q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi} \xi^2}. \quad (13)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (13), отримаємо розв'язок задачі (6), (12) у вигляді,

$$\vartheta(x) = \frac{q_0}{\lambda \pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x}{\xi^2} d\xi,$$

який визначає змінну Кірхгофа.

3. Розглянемо термочутливу пластину, яку нагрівають тепловим потоком, поверхнева густина якого є $q_0 = \text{const}$, зосередженим у прямокутнику площею $S = 4h\delta$ на межовій поверхні

$$K_1 = \{(x, -l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}.$$

На іншій межовій поверхні пластини

$$K_2 = \{(x, l, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$$

задано крайові умови другого роду (рис. 3).

Для визначення розподілу температури $t(x, y)$ за просторовими координатами x та y скористаємось нелінійним рівнянням теплопровідності [12, 13]

$$\text{div}(\lambda(t) \text{grad } t(x, y)) = 0 \quad (14)$$

Рис. 3. Ізотропна пластина під впливом теплового потоку

з крайовими умовами

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \lambda(t) \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=-l} = -q_0 S_-(h-|x|), \quad \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (15)$$

Застосуємо до рівняння (14) та крайових умов (15) перетворення Кірхгофа (3), внаслідок чого отримаємо рівняння

$$\Delta \vartheta = 0 \quad (16)$$

та крайові умови

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda^0} S_-(h-|x|), \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (17)$$

Застосували інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до рівняння (16) та крайових умов (17), приходимо до звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = 0 \quad (18)$$

з крайовими умовами

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=-l} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi} \sin \xi h, \quad \left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=l} = 0. \quad (19)$$

Загальний розв'язок рівняння (18) знайдемо у вигляді

$$\bar{\vartheta}(y) = c_1 e^{\xi y} + c_2 e^{-\xi y}.$$

Використавши крайові умови (19) для визначення сталих інтегрування, отримаємо розв'язок задачі (18), (19):

$$\bar{\vartheta}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q_0}{\lambda^0 \xi^2} \sin \xi h \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l}. \quad (20)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (20), одержимо наступне співвідношення

$$\vartheta(x, y) = \frac{2q_0}{\lambda\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x}{\xi^2} \sin \xi h \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l} d\xi,$$

яке цілком визначає змінну Кірхгофа.

4. Розглянемо випадок, коли геометричні параметри прямокутника h, δ , в якому зосереджено тепловий потік, є малими порівняно з шириною пластини $2l$. При цьому рівняння (14) не зміниться, але зміняться крайові умови (15), які матимуть вигляд

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \lambda(t) \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=-l} = -q_0 \delta(x), \quad \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (21)$$

Після застосування перетворення Кірхгофа до умов (21) отримаємо

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda^0} \delta(x), \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (22)$$

Використавши інтегральне перетворення Фур'є за координатою x до співвідношень (22), одержимо крайові умови

$$\left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=-l} = -\frac{q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi}}, \quad \left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=l} = 0.$$

Із урахуванням цих умов розв'язок рівняння (18) набуває вигляду

$$\bar{\vartheta}(y) = \frac{q_0}{\lambda^0 \sqrt{2\pi} \xi} \frac{ch \xi (y-l)}{sh 2 \xi l}. \quad (23)$$

Застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур'є до співвідношення (23), отримаємо розв'язок задачі (16), (22) у вигляді

$$\vartheta(x, y) = \frac{q_0}{\lambda\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \xi x ch \xi (y-l)}{\xi sh 2 \xi l} d\xi,$$

який визначає змінну Кірхгофа.

Частковий приклад та аналіз отриманих результатів. Для розв'язування багатьох практичних задач використовують лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [12, 13]

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt), \quad (24)$$

Рис. 4. Графіки залежності температури $t(x, y)$ від координати y (а) та координати x (б) при $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$: а — 1 — $x = 0$; 2 — $x = 0,01$; б — 1 — $y = -0,005$; 2 — $y = 0$; 3 — $y = 0,005$

де k — температурний коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини. Із (3), (24) отримуємо співвідношення для визначення температури $t(x, y)$ в пластині,

$$t(x, y) = \frac{1 - \sqrt{1 - 2 \frac{k}{\lambda_0} \vartheta(x, y)}}{k}, \quad (25)$$

яке описує температурне поле в термочутливій пластині з локальним нагріванням для наведених вище моделей 1—4.

За формулою (25) (математична модель 3) проведено обчислення та виконано числовий аналіз розподілу температури $t(x, y)$ у пластині для таких вихідних даних: матеріали пластини — кремній та германій; $l = h = 0,01 \text{ м}$.

Для наведених конструкційних матеріалів пластини в інтервалі температур $[0 \text{ } ^\circ\text{C}; 1127 \text{ } ^\circ\text{C}]$ спостерігаємо такі залежності коефіцієнта теплопровідності від температури [15]:

для кремнію

$$\lambda(t) = 67,9 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \left(1 - 0,0005 \frac{1}{\text{град}} t \right),$$

для германію

$$\lambda(t) = 60,3 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \left(1 - 0,0008 \frac{1}{\text{град}} t \right).$$

Рис. 5. Залежність температури $t(x, y)$ від координати y при заданих значеннях координати $x = 0$ і поверхневої густини теплового потоку q_0 (а) та $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$ (б): а — 1 — $q_0 = 400 \text{ Вт/м}^2$; 2 — $q_0 = 300 \text{ Вт/м}^2$; 3 — $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$; б — 1 — германій; 2 — кремній

Це є частковими випадками співвідношення (24). Числові обчислення виконано з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

На рис. 4, а, наведено графіки залежності температури $t(x, y)$ від просторової координати y при заданих значеннях координати x , коли матеріалом пластини обрано кремній. Ці графіки свідчать про те, що температура як функція координати y монотонно спадає і досягає максимального значення на межевій поверхні пластини K_1 , на якій зосереджено тепловий потік.

На рис. 4, б, зображено графіки залежності температури $t(x, y)$ від просторової координати x та заданих значень просторової координати y , коли матеріалом пластини обрано кремній. Як бачимо, функція координати x є достатньо гладкою та монотонною функцією і досягає максимального значення в точці $(0; 0,005)$. При збільшенні за абсолютною величиною значень просторової координати x температура знижується, що свідчить про адекватність математичної моделі реальному фізичному процесу.

На рис. 5, а, зображено графіки зміни температури $t(x, y)$ залежно від просторової координати y при $x = 0$ та заданих значеннях поверхневої густини теплового потоку q_0 , а на рис. 5, б, при $q_0 = 200 \text{ Вт/м}^2$ для різних матеріалів пластини. Як бачимо на рис. 5, коефіцієнт теплопровідності є важливим параметром, який впливає на температурне поле. Збільшення його значення приводить до зменшення температури в середовищі.

Висновки

Використання узагальнених функцій у нелінійних математичних моделях визначення та аналізу температурних полів у ізотропній термочутливій пластині з локальним нагріванням дало змогу ефективно описати локальні джерела тепла, а перетворення Кірхгофа — лінеаризувати нелінійні диференціальні рівняння теплопровідності та крайові умови.

Отримані аналітичні розв'язки нелінійних крайових задач теплопровідності, диференціальні рівняння та крайові умови яких містять розривну та сингулярну праву частину, дозволяють розробляти обчислювальні алгоритми та на їх основі створювати програмні засоби для аналізу температурних режимів у термочутливих середовищах з локальним нагріванням щодо їх термостійкості під час нагрівання та захистити їх від перегрівання, яке може спричинити руйнування не тільки окремих елементів, а й всієї конструкції.

Числовий аналіз температури як функції просторових координат свідчить про відповідність розроблених математичних моделей аналізу теплообмінних процесів у термочутливій пластині з локальними зонами нагрівання реальному фізичному процесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Carpinteri A., Paggi M.* Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams // *J. Eng. Math.*, 2008, **61**, №2, pp. 371—384.
2. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // *Appl. Mech. Rev.*, 1991, **44**, pp. 383—397.
3. *Otao Y., Tanigawa O., Ishimaru O.* Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm // *J. Therm. Stresses*, 2000, **23**, pp. 257—271.
4. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses*, 1996, **19**, №1, pp. 77—102.
5. *Tanigawa Y., Otao Y.* Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation // *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu*, 2002, **2**, pp. 133—134.
6. *Yangian Xu., Daihui Tu.* Analysis of steady thermal stress in a ZrO₂/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM // 2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng., 2009, V 2—2, pp. 433—436.
7. *Довбня К.М., Дундар О.Д.* Стационарний теплообмін тонких пологих ізотропних оболонок, які знаходяться під дією джерел тепла, зосереджених по двовимірній області // *Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки*, 2016, №1—2, с. 107—112.
8. *Азаренков В. И.* Исследование и разработка тепловой модели и методов анализа температурных полей конструкций радиоэлектронной аппаратуры // *Technology audit and production reserves*, 2012, No. 3/1(5), с. 39—40.

9. Гавриш В.І., Федасюк Д.В. Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012, 176 с.
10. Havrysh V.I., Baranetskiy Ya.O., Kolyasa L.I. Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices // *Radio electronics, computer science, management*, 2018, № 3(46), pp. 7—15.
11. Havrysh V.I., Kolyasa L.I., Ukhanska O.M. Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions// *Scientific Bulletin of the National Chemical University*, 2019, № 1, pp. 94—100.
12. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984, 368 с.
13. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наук. думка, 1992, 280 с.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977, 720 с.
15. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976, 1008 с.

Отримано 01.07.21

REFERENCES

1. Carpinteri, A. and Paggi, M. (2008), "Thermoelastic mismatch in nonhomogeneous beams", *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 61, no. 2-4, pp. 371-384, available at: <https://doi.org/10.1007/s10665-008-9212-8>.
2. Noda, N. (1991), "Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, pp. 383-397, available at: <https://doi.org/10.1115/1.3119511>.
3. Otao, Y., Tanigawa, O. and Ishimaru, O. (2000), "Optimization of material composition of functionality graded plate for thermal stress relaxation using a genetic algorithm", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 23, pp. 257-271, available at: <https://doi.org/10.1080/014957300280434>.
4. Tanigawa, Y., Akai, T. and Kawamura, R. (1996), "Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties", *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 19, no. 1, pp. 77-102, available at: <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.
5. Tanigawa, Y. and Otao, Y. (2002), "Transient thermoelastic analysis of functionally graded plate with temperature-dependent material properties taking into account the thermal radiation", *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu*, Vol. 2, pp. 133-134, available at: https://doi.org/10.1299/jsmemecjo.2002.2.0_133.
6. Yangian, Xu and Daihui, Tu. (2009), "Analysis of steady thermal stress in a ZrO₂/FGM/Ti-6Al-4V composite ECBF plate with temperature-dependent material properties by NFEM", *2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng.*, Vol. 2, pp. 433-436, available at: <https://doi.org/10.1109/ICICTA.2009.842>.
7. Dovbnia, K.M. and Dundar, O.D. (2016), "Stationary heat exchange of thin flat isotropic shells, which are under the action of heat sources concentrated in a two-dimensional region", *Visnyk DonNU. Ser. A: Pryrodnychi nauky*, Vol. 1-2, pp. 107-112.
8. Azarenkov, V.I. (2012), "Research and development of a thermal model and methods for analyzing temperature fields of electronic equipment structures", *Technology audit and production reserves*, Vol. 3/1, no. 5, pp. 39-40.

9. Havrysh, V.I. and Fedasjuk, D.V. (2012), *Modelyuvannya temperaturnykh rezhymiv u kuskovo-odnorodnykh strukturakh* [Modelling of temperature regimes in piecewise-homogeneous structures], Vydavnytstvo Lvivskoyi politekhniki, Lviv, Ukraine.
10. Havrysh, V.I., Baranetskiy, Ya.O. and Kolyasa, L.I. (2018), "Investigation of temperature modes in thermosensitive non-uniform elements of radioelectronic devices", *Radio electronics, computer science, management*, Vol. 3, no. 46, pp.7-15, available at: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-1>.
11. Havrysh, V.I., Kolyasa, L.I., and Ukhanska, O.M. (2019), "Determination of temperature field in thermally sensitive layered medium with inclusions", *Naukovyi Visnyk NHU*, Vol. 1, pp. 94-100, available at: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-1/5>.
12. Podstrigach, Ia.S., Lomakin, V.A. and Koliano, Iu.M. (1984), *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury* [Thermoelasticity of bodies of inhomogeneous structure], Nauka, Moscow, USSR.
13. Koliano, Iu.M. (1992), *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela* [Methods of thermal conductivity and thermoelasticity of an inhomogeneous body], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine, available at: <https://doi.org/10.1192/bjp.161.2.280> b.
14. Korn, G. and Korn, T. (1977), *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [A guide to mathematics for scientists and engineers], Nauka, Moscow, USSR.
15. Kikoina, I.K. (1976), *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* [Tables of physical quantities. Directory], Atomizdat, Moscow, USSR.

Received 01.07.21

V.I. Havrysh

MATHEMATICAL MODELS OF THE TEMPERATURE FIELD IN HEAT-SENSITIVE ELEMENTS OF ELECTRONIC DEVICES

Nonlinear mathematical models for the analysis of temperature regimes in a thermosensitive isotropic plate heated by locally concentrated heat sources have been developed. For this purpose, the heat-active zones of the plate are described using the theory of generalized functions. Given this equation of thermal conductivity and boundary conditions contain discontinuous and singular right parts. The original nonlinear equations of thermal conductivity and nonlinear boundary conditions are linearized by Kirchhoff transformation. To solve the obtained boundary value problems, the integral Fourier transform was used and, as a result, their analytical solutions in the images were determined. The inverse integral Fourier transform was applied to these solutions, which made it possible to obtain analytical expressions for determining the Kirchhoff variable. As an example, the linear dependence of the thermal conductivity on temperature is chosen, which is often used in many practical problems. As a result, analytical relations were obtained to determine the temperature in the heat-sensitive plate. The given analytical solutions are presented in the form of improper convergent integrals. According to Newton's method (three eighths), numerical values of these integrals are obtained with a certain accuracy for given values of plate thickness, spatial coordinates, specific power of heat sources, thermal conductivity of structural materials of the plate and geometric parameters of the heat-active zone. The material of the plate is silicon and germanium. To determine the numerical values of temperature in the structure, as well as the analysis of heat transfer processes in the middle of the plate due to local heating, developed software, using which geometric mapping of temperature distribution depending on spatial coordinates, thermal conductivity, specific heat flux density. The obtained numerical values

of temperature testify to the correspondence of the developed mathematical models of the analysis of heat exchange processes in the thermosensitive plate with local heating to the real physical process.

Keywords: temperature field; isotropic thermosensitive plate; thermal conductivity; heat-insulated surface; perfect thermal contact, local heating.

ГАВРИШ Василь Іванович, д-р техн. наук, професор, професор кафедри програмного забезпечення Національного університету «Львівська політехніка». У 1982 р. закінчив Львівський державний університет ім. І. Франка. Область наукових досліджень — моделювання процесів теплопровідності в середовищах кусково-однорідної структури та розроблення методів визначення розв'язків лінійних і нелінійних крайових задач теплопровідності.