DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.43.06.034>
УДК 004.942; 512.554

С.І. Кліпков, канд. техн. наук
Приватне акціонерне товариство НЕК «Укренерго»
Україна, 01032, Київ, вул. С. Петлюри, 25,
тел. (044) 2491216, E-mail: klipkov.s@gmail.com

Деякі особливості уявних експоненційних функцій у двовимірних некомутативних неасоціативних алгебраїчних системах

Розглянуто математичні властивості уявних експоненційних функцій, що можуть використовуватися для подання елементів двовимірних алгебраїчних систем, які конструюють за допомогою запровадження антикомутативності в законах композиції елементів базису двовимірних канонічних числових систем.

К л ю ч о в і с л о в а: експоненційні функції, уявні одиниці, комплексні числа, подвійні числа, дуальні числа, алгебраїчні системи.

Загальні положення. При побудові числових і алгебраїчних систем як елементи базису використовуються уявні одиниці, що не належать до множини дійсних чисел. Найвідомішими двовимірними канонічними числовими системами є комплексні, подвійні (гіперболічні) та дуальні (параболічні) числа, елементи яких подаються у вигляді $a = a_1 + ia_2$, де $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ [1—3]. При цьому для кожної із зазначених числових систем уявна одиниця має свою математичну інтерпретацію.

Для комплексних чисел використовується уявна одиниця, якій присвоюється властивість $i^2 = -1$. У подвійних чисел суть уявної одиниці встановлюється співвідношеннями $i^2 = 1$, $i \neq \pm 1$, а у дуальних — співвідношеннями $i^2 = 0$, $i \neq 0$. Як впливає з наведених трактувань уявних одиниць, жодна з них не є дійсним числом.

Іншим базисним елементом у складі зазначених числових систем є звичайна дійсна одиниця 1, з якою комутує кожна уявна одиниця i ($i \cdot 1 = 1 \cdot i = i$). Тому ці числові системи є асоціативно-комутативними.

© Кліпков С.І., 2021

Елементи наведених числових систем можуть записуватися також в показниковій формі з використанням уявних експоненційних функцій. Для комплексних чисел ($i^2 = -1$) використовується уявна експонента, яка зображується формулою Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (1)$$

де $\varphi = \arctan a_2 / a_1$. Подвійним числам ($i^2 = 1$) відповідає експонента, яка задається гіперболічними функціями:

$$e^{i\varphi} = \operatorname{ch} \varphi + i \operatorname{sh} \varphi, \quad (2)$$

де $\varphi = \operatorname{arcth} a_2 / a_1$. І, нарешті, для дуальних чисел ($i^2 = 0$) справедливе співвідношення

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi, \quad (3)$$

де $\varphi = a_2 / a_1$.

Зазначимо, що наведені експоненційні функції можна визначити, розклавши в ряд Маклорена,

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + \frac{\varphi}{1!} i + \frac{\varphi^2}{2!} i^2 + \frac{\varphi^3}{3!} i^3 + \frac{\varphi^4}{4!} i^4 + \dots, \quad (4)$$

або через границю

$$e^{i\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n \quad (5)$$

з урахуванням степенів уявних одиниць $i^2, i^3, i^4, \dots$ кожної із зазначених числових систем.

Для комплексних чисел $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \frac{\varphi^5}{5!} - \dots = \\ &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + i \left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right) = \cos \varphi + i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Для подвійних чисел $i^2 = 1, i^3 = i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$

$$e^{i\varphi} = 1 + i \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \frac{\varphi^5}{5!} - \dots =$$

$$= 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + i \left(\frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right) = \operatorname{ch} \varphi + i \operatorname{sh} \varphi. \quad (6)$$

І, нарешті, для дуальних чисел $i^2 = 0$, $i^3 = 0$, $i^4 = 0$, $i^5 = 0$, ...

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi.$$

Справедливість отриманих виразів можна перевірити, використавши границю (5). Обчислюючи функцію $e^{i\varphi}$ для комплексних чисел за формулою

$$e^{i\varphi} = \left(1 + \frac{i\varphi}{n} \right)^n \quad (7)$$

при $\varphi = \pi/3$ і $n = 1000000$, отримуємо значення, які співвідносяться з формулою Ейлера:

$$e^{i\varphi} = 0,5000002742 + i0,8660258787 \approx \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Для подвійних чисел використання формули (7) при тих же значеннях φ і n приводить до значення

$$e^{i\varphi} = 1,600286419 + i1,249366708 \approx \operatorname{ch} \varphi + i \operatorname{sh} \varphi,$$

а для дуальних чисел — до значення

$$e^{i\varphi} = 1,0000000000 + i1,0471975512 \approx 1 + i\varphi.$$

Слід зазначити, що кожна з розглянутих експонент використовується для подання елементів конкретних числових систем, тому їх математичні властивості в основному аналогічні математичним властивостям відповідних числових систем. При цьому уявні експоненційні функції (1)—(3) є асоціативно-комутативними із звичайною операцією множення, за якою показники степенів співмножників додаються:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} e^{i\phi} &= e^{i(\varphi+\phi)} = e^{i\varphi} e^{i\phi}, \\ (e^{i\varphi} e^{i\phi}) e^{i\delta} &= e^{i\varphi} (e^{i\phi} e^{i\delta}) = e^{i(\varphi+\phi+\delta)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Некомутативні подвійні числа. В роботі [4] описано алгебру розмірності 2 з діленням, елементи якої подано у вигляді $a = a_1 i_1 + a_2 i_2$, а закони композиції базисних елементів i_1 , i_2 задано наступним чином:

$$i_1 \cdot i_1 = i_1, \quad i_2 \cdot i_2 = i_1, \quad i_1 \cdot i_2 = -i_2, \quad i_2 \cdot i_1 = i_2. \quad (9)$$

Зазначену алгебру, яку надалі називатимемо алгеброю $\bar{D}$, можна розглядати як некомутативні подвійні числа, оскільки закони композиції (9) відрізняються від законів композиції подвійних чисел тільки антикомутативністю добутку базисних елементів i_1, i_2 .

Зауважимо, що в алгебрі $\bar{D}$, як і в будь-якій іншій алгебрі, заміна дійсної одиниці 1 символом $i_1 \notin \mathbb{R}$ фактично обумовлена некомутативністю базисних елементів i_1, i_2 , оскільки з усіма елементами поля $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ уявна одиниця i_2 комутує. В усьому іншому символ i_1 тотожний звичайній дійсній одиниці.

Антикомутативність добутку елементів базису i_1, i_2 , в свою чергу, обумовлює неасоціативність алгебри $\bar{D}$:

$$(i_2 \cdot i_2) \cdot i_2 = i_1 \cdot i_2 = -i_2, \quad i_2 \cdot (i_2 \cdot i_2) = i_2 \cdot i_1 = i_2.$$

Зміна законів композиції алгебри $\bar{D}$ стосовно подвійних чисел призводить до зміни знаків членів ряду (6). Оскільки у цьому випадку [4]

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2}(0) &= i_1, \quad (e^{\varphi i_2})' = e^{\varphi i_2} i_2, \\ (e^{\varphi i_2})'' &= e^{\varphi i_2} i_2^2, \dots, \quad (e^{\varphi i_2})^{(k-1)} = e^{\varphi i_2} i_2^{k-1}, \\ i_2^2 &= i_2 \cdot i_2 = i_1, \quad i_2^3 = i_1 \cdot i_2 = -i_2, \\ i_2^4 &= -i_2 \cdot i_2 = -i_1, \quad i_2^5 = -i_1 \cdot i_2 = i_2, \dots, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} &= i_1 + \frac{\varphi}{1!} i_1 i_2 + \frac{\varphi^2}{2!} i_1 i_2^2 + \frac{\varphi^3}{3!} i_1 i_2^3 + \frac{\varphi^4}{4!} i_1 i_2^4 + \\ &+ \frac{\varphi^5}{5!} i_1 i_2^5 + \frac{\varphi^6}{6!} i_1 i_2^6 + \frac{\varphi^7}{7!} i_1 i_2^7 + \frac{\varphi^8}{8!} i_1 i_2^8 + \dots = \\ &= i_1 - \frac{\varphi}{1!} i_2 - \frac{\varphi^2}{2!} i_1 + \frac{\varphi^3}{3!} i_2 + \frac{\varphi^4}{4!} i_1 - \frac{\varphi^5}{5!} i_2 - \frac{\varphi^6}{6!} i_1 + \frac{\varphi^7}{7!} i_2 + \frac{\varphi^8}{8!} i_1 + \dots, \end{aligned}$$

або

$$e^{\varphi i_2} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \dots \right) i_1 -$$

$$-\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right) i_2 = \cos(\varphi) i_1 - \sin(\varphi) i_2, \quad (10)$$

а використання формули (7) при $\varphi = \pi/3$ і $n = 1000000$ відповідає значенням

$$e^{\varphi i_2} = 0,5000002742 i_1 - 0,8660258787 i_2 \approx \cos(\varphi) i_1 - \sin(\varphi) i_2.$$

Варто зазначити, що при множенні елементів алгебри $\vec{D}$, у тому числі і у виразі (7), виконувати множення необхідно послідовно зліва направо, на що вказує стрілка над символом $\vec{D}$.

З урахуванням (10) елементи алгебри $\vec{D}$ можна подати у показовій формі:

$$a = a_1 i_1 + a_2 i_2 \rightarrow \rho [\cos(\varphi) i_1 + \sin(\varphi) i_2] = \rho e^{-\varphi i_2}, \quad (11)$$

де $\rho = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ — модуль елемента $a_1 i_1 + a_2 i_2$.

Таким чином, перехід від звичайних подвійних чисел до некомутативних, щодо їх подання у показниковій формі, відповідає переходу від експоненційної функції, яка визначається гіперболічними функціями (2), до експоненційної функції, яка визначається гармонічними функціями (11). Крім того, множення експоненційних функцій (10) в даному випадку виконується відповідно до законів композиції (9):

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} e^{\phi i_2} &= [\cos(\varphi) i_1 - \sin(\varphi) i_2] [\cos(\phi) i_1 - \sin(\phi) i_2] = \\ &= \cos(\varphi) i_1 \cos(\phi) i_1 + \sin(\varphi) i_2 \sin(\phi) i_2 - \\ &- \cos(\varphi) i_1 \sin(\phi) i_2 - \sin(\varphi) i_2 \cos(\phi) i_1 = \cos(\varphi) \cos(\phi) i_1 + \\ &+ \sin(\varphi) \sin(\phi) i_1 - [\sin(\varphi) \cos(\phi) i_2 + \cos(\varphi) \sin(\phi) i_2] = \\ &= \cos(\varphi - \phi) i_1 - \sin(\varphi - \phi) i_2 = e^{(\varphi - \phi) i_2}. \end{aligned}$$

Тому на відміну від співвідношень (8) зазначене множення некомутативне і неасоціативне, оскільки при множенні кути експоненти не додаються, а віднімаються:

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} e^{\phi i_2} &= e^{(\varphi - \phi) i_2} \neq e^{\phi i_2} e^{\varphi i_2} = e^{(\phi - \varphi) i_2}, \\ (e^{\varphi i_2} e^{\phi i_2}) e^{\delta i_2} &= e^{(\varphi - \phi - \delta) i_2} \neq e^{\varphi i_2} (e^{\phi i_2} e^{\delta i_2}) = e^{(\varphi - \phi + \delta) i_2}. \end{aligned}$$

Через експоненційну функцію (10) можна знайти вирази для базисних елементів алгебри $\vec{D}$, що відповідають значенням кута φ , при яких виконуються умови $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$ для i_1 , а також $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = -1$ для i_2 . З урахуванням періодичності уявної функції $e^{\varphi i_2}$ зазначені вирази можуть бути подані у вигляді

$$i_1 = e^{2\pi n i_2}, \quad i_2 = e^{\left(-\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) i_2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Крім того, експоненційна функція $e^{\varphi i_2}$ (10) дозволяє визначити тригонометричні функції косинуса та синуса як функції змінних алгебри $\vec{D}$. Оскільки

$$e^{-\varphi i_2} = \cos(\varphi) i_1 + \sin(\varphi) i_2,$$

то

$$\cos(\varphi) i_1 = \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}), \quad (13)$$

$$\sin(\varphi) i_2 = \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}). \quad (14)$$

Перемножуючи обидві частини виразу (13) справа на i_1 , отримуємо

$$\cos(\varphi) i_1 = \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) i_1,$$

або

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}). \quad (15)$$

Тепер, перемножуючи обидві частини виразу (14) справа спочатку на i_2 , а потім на i_1 , отримуємо

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) i_2. \quad (16)$$

Вирази (15), (16) є формулами для визначення тригонометричних функцій косинуса і синуса через уявні експоненційні функції алгебри $\vec{D}$.

Справедливість отриманих виразів можна визначити на основі аналізу відомих співвідношень між зазначеними тригонометричними функціями.

1. Основна тригонометрична тотожність:

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) + \\ &+ \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) i_2 \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) i_2.\end{aligned}$$

Враховуючи, що відповідно до (12) при $n = 0$ $i_2 = e^{-\frac{\pi}{2} i_2}$, маємо

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= \frac{1}{4} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) + \\ &+ \frac{1}{4} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) e^{-\frac{\pi}{2} i_2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) e^{-\frac{\pi}{2} i_2} = \\ &= \frac{1}{4} (e^{\varphi i_2} e^{\varphi i_2} + e^{\varphi i_2} e^{-\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2} e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2} e^{-\varphi i_2}) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(e^{-\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} \right) \left(e^{-\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} \right) = \frac{1}{4} (2 + e^{2\varphi i_2} + e^{-2\varphi i_2}) + \\ &+ \frac{1}{4} \left[e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right] \left[e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right] = \frac{1}{4} (2 + e^{i_2 2\varphi} + e^{-i_2 2\varphi}) + \\ &+ \frac{1}{4} \left[e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} + e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} (2 + e^{2\varphi i_2} + e^{-2\varphi i_2}) + \frac{1}{4} \left[1 - e^{-\left(\varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{4} (2 + e^{2\varphi i_2} + e^{-2\varphi i_2}) + \frac{1}{4} (2 - e^{-2\varphi i_2} - e^{2\varphi i_2}) = 1.\end{aligned}$$

Множення елементів алгебри $\vec{D}$ у правій частині наведених виразів виконується з урахуванням віднімання кутів послідовно зліва направо.

2. Косинус подвійного кута:

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} (2 + e^{2\varphi i_2} + e^{-2\varphi i_2}) -$$

$$-\frac{1}{4}(2 - e^{-2\varphi i_2} - e^{2\varphi i_2}) = \frac{1}{2}(e^{2\varphi i_2} + e^{-2\varphi i_2}) = \cos 2\varphi.$$

3. Синус подвійного кута:

$$\begin{aligned} 2 \sin \varphi \cos \varphi &= 2 \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) i_2 \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) = \\ &= 2 \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) e^{-\frac{\pi}{2} i_2} \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) = \\ &= (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) e^{-\frac{\pi}{2} i_2} \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} \right) (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right] (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{\varphi i_2} + e^{\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{-\varphi i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{\varphi i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} e^{-\varphi i_2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{\left(-2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} + e^{\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right] = \frac{1}{2} \left[e^{\left(-2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-2\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} - e^{2\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} \right) = \frac{1}{2} (e^{-2\varphi i_2} - e^{2\varphi i_2}) i_2 = \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Слід зазначити, що некомутативність множення уявних експоненційних функцій у наведених вище виразах не впливає на множення тригонометричних функцій, область визначення та область зміни яких є дійсними числами. Так, перестановка множників $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ у виразі для синуса подвійного кута призводить до такого ж результату:

$$\begin{aligned} 2 \cos \varphi \sin \varphi &= 2 \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) i_2 = \\ &= 2 \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) \frac{1}{2} (e^{-\varphi i_2} - e^{\varphi i_2}) e^{-\frac{\pi}{2} i_2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) \left(e^{-\varphi i_2} e^{-\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\varphi i_2} e^{\frac{\pi}{2} i_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (e^{\varphi i_2} + e^{-\varphi i_2}) \left(e^{\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{-\frac{\pi}{2} i_2} + e^{-\frac{\pi}{2} i_2} - e^{\left(-2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} - e^{\left(-2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) i_2} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{2\varphi i_2} e^{+\frac{\pi}{2} i_2} - e^{-2\varphi i_2} e^{+\frac{\pi}{2} i_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (e^{2\varphi i_2} - e^{-2\varphi i_2}) e^{+\frac{\pi}{2} i_2} = \frac{1}{2} (e^{2\varphi i_2} - e^{-2\varphi i_2}) (-i_2) = \frac{1}{2} (e^{-2\varphi i_2} - e^{2\varphi i_2}) i_2.
 \end{aligned}$$

Логарифмічні функції базисних елементів i_1, i_2 , алгебри $\vec{D}$ можуть бути визначені із співвідношень (12):

$$\begin{aligned}
 \ln i_1 &= 2n\pi i_2, \quad (-i_1) = (1 + 2n)\pi i_2, \quad \ln i_2 = \left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi i_2, \\
 \ln(-i_2) &= \left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi i_2, \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Для порівняння наведемо аналогічні логарифмічні функції базисних елементів, комплексних чисел:

$$\begin{aligned}
 \ln 1 &= 2n\pi i, \quad \ln(-1) = (1 + 2n)\pi i, \quad \ln i = \left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi i, \\
 \ln(-i) &= \left(\frac{4n-1}{2}\right)\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Слід зазначити, що оскільки в рамках алгебри $\vec{D}$ множення її елементів пов'язане з відніманням кутів, логарифм добутку базисних елементів обчислюється наступним чином:

$$\ln(i_2^n) = \ln\left(\underbrace{i_2 \cdot i_2 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_2}_n\right) = -(n-2)\ln i_2. \tag{18}$$

Дійсно, для $i_2^7 = -i_2$ (послідовно множимо базисні елементи i_2 зліва направо з урахуванням законів композиції) маємо

$$\ln(i_2^7) = \ln(-i_2) = -5 \ln i_2 = -5 \left(-\frac{\pi}{2} \right) i_2 = \frac{5}{2} \pi i_2,$$

що відповідає виразу $\ln(-i_2)$ у співвідношеннях (17) при $n=1$. Теж саме отримуємо для $\ln(i_2^8)$:

$$\ln(i_2^8) = \ln(-i_1) = -6 \ln i_2 = -6 \left(-\frac{\pi}{2} \right) i_2 = 3\pi i_2.$$

Зазначимо, що відповідно до (18)

$$\begin{aligned} \ln(i_2^1) &= -(1-2) \ln(i_2) = \ln(i_2), \\ \ln(i_2^0) &= -(0-2) \ln(i_2) = 2 \ln(i_2). \end{aligned}$$

Логарифмічна функція елемента алгебри $\vec{D}$ може бути знайдена рішенням рівняння $e^x = a$ відносно змінної x . З огляду на періодичність уявної експоненційної функції маємо

$$x = \ln(a) = \ln(\rho_a e^{-(\varphi_a + 2\pi n)i_2}) = \ln \rho_a - (\varphi_a + 2\pi n)i_2, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Оскільки в алгебрі $\vec{D}$ існує права одиниця [4], вираз (19) може бути подано у вигляді

$$\ln(a) = (\ln \rho_a - (\varphi_a + 2\pi n)i_2) i_1 = \ln(\rho_a) i_1 - (\varphi_a + 2\pi n)i_2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для визначення зв'язку тригонометричних функцій з гіперболічними функціями в алгебрі $\vec{D}$ розглянемо розклад в степеневий ряд функції синуса

$$\sin(\varphi i_2) = \frac{\varphi i_2}{1!} - \frac{(\varphi i_2)^3}{3!} + \frac{(\varphi i_2)^5}{5!} - \frac{(\varphi i_2)^7}{7!} + \dots \quad (20)$$

Обчислюючи в доданках виразу (20) степені елемента базису i_2 , отримуємо

$$\begin{aligned} \sin(\varphi i_2) &= \varphi i_2 + \frac{\varphi^3}{3} i_2 + \frac{\varphi^5}{5} i_2 + \frac{\varphi^7}{7} i_2 + \dots = \\ &= \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} + \frac{\varphi^7}{7} + \dots \right) i_2 = \operatorname{sh}(\varphi) i_2. \end{aligned}$$

Так само можна отримати наступні співвідношення:

$$\cos(\varphi i_2) = \operatorname{ch}(\varphi), \quad \operatorname{sh}(\varphi i_2) = \sin(\varphi) i_2, \quad \operatorname{ch}(\varphi i_2) = \cos(\varphi).$$

Некомутативні комплексні числа. Розглянемо алгебру $\vec{K}$, елементи $a = a_1 i_1 + a_2 i_2$ якої перемножуються за законами композиції

$$i_1 \cdot i_1 = i_1, \quad i_2 \cdot i_2 = -i_1, \quad i_1 \cdot i_2 = -i_2, \quad i_2 \cdot i_1 = i_2, \quad (21)$$

і визначимо її основні алгебраїчні властивості. Із співвідношень (21) випливає, що алгебру $\vec{K}$ можна розглядати як некомутативні комплексні числа. Для з'ясування питань, пов'язаних із діленням елементів зазначеної алгебри, знайдемо рішення рівняння $a \cdot x = b$, або в алгебраїчній формі

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2) \cdot (x_1 i_1 + x_2 i_2) = b_1 i_1 + b_2 i_2,$$

якому відповідає система дійсних рівнянь

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 = b_1, \quad a_2 x_1 - a_1 x_2 = b_2.$$

Рішення зазначеної системи рівнянь дозволяє визначити дійсні складові елемента x алгебри $\vec{K}$, що є лівою часткою від ділення b на a :

$$x_1 = \frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{a_1^2 - a_2^2}, \quad x_2 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1^2 - a_2^2}. \quad (22)$$

Тепер розглянемо рівняння $y \cdot a = b$, або

$$(y_1 i_1 + y_2 i_2) \cdot (a_1 i_1 + a_2 i_2) = b_1 i_1 + b_2 i_2.$$

У цьому випадку система двох дійсних рівнянь виглядає так:

$$y_1 a_1 - y_2 a_2 = b_1, \quad -y_1 a_2 + y_2 a_1 = b_2,$$

і має наступне рішення, що є правою часткою від ділення b на a :

$$y_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_1^2 - a_2^2}, \quad y_2 = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1^2 - a_2^2}. \quad (23)$$

Зворотні елементи a_r^{-1} , a_l^{-1} в рамках алгебри $\vec{K}$ відповідають виразам (22), (23) при значеннях $b_1 = 1$, $b_2 = 0$:

$$a_{r1}^{-1} = \frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad a_{r2}^{-1} = \frac{a_2}{a_1^2 - a_2^2},$$

$$a_{l1}^{-1} = \frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2}, \quad a_{l2}^{-1} = \frac{a_2}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Як бачимо, алгебра $\vec{K}$ не є алгеброю з діленням, оскільки елементи $a = a_1 i_1 + a_2 i_2$ при $a_1 = a_2$ є дільниками нуля і не мають зворотних елементів. Дійсно, добуток двох ненульових елементів з однаковими дійсними складовими дорівнює нулю:

$$(a i_1 + a i_2) \cdot (b i_1 + b i_2) = (ab - ab) i_1 + (-ab + ab) i_2 = 0 i_1 + 0 i_2.$$

Для визначення нейтральних елементів e_r, e_l алгебри $\vec{K}$ у виразах (22), (23) приймаємо $b_1 = a_1, b_2 = a_2$ і отримуємо вирази

$$e_{r1} = 1, \quad e_{r2} = 0, \quad e_{l1} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}, \quad e_{l2} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 - a_2^2},$$

з яких випливає, що в алгебрі $\vec{K}$ існує лише правий одиничний елемент.

Розглянемо тепер функцію $e^{\varphi i_2}$ в алгебрі $\vec{K}$. В цьому випадку

$$i_2^2 = i_2 \cdot i_2 = -i_1, \quad i_2^3 = -i_1 \cdot i_2 = i_2,$$

$$i_2^4 = i_2 \cdot i_2 = -i_1, \quad i_2^5 = -i_1 \cdot i_2 = i_2, \dots,$$

тому

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} &= i_1 + \frac{\varphi}{1!} i_1 i_2 + \frac{\varphi^2}{2!} i_1 i_2^2 + \frac{\varphi^3}{3!} i_1 i_2^3 + \frac{\varphi^4}{4!} i_1 i_2^4 + \\ &+ \frac{\varphi^5}{5!} i_1 i_2^5 + \frac{\varphi^6}{6!} i_1 i_2^6 + \frac{\varphi^7}{7!} i_1 i_2^7 + \frac{\varphi^8}{8!} i_1 i_2^8 + \dots = \\ &= i_1 - \frac{\varphi}{1!} i_2 + \frac{\varphi^2}{2!} i_1 - \frac{\varphi^3}{3!} i_2 + \frac{\varphi^4}{4!} i_1 - \frac{\varphi^5}{5!} i_2 + \frac{\varphi^6}{6!} i_1 - \frac{\varphi^7}{7!} i_2 + \frac{\varphi^8}{8!} i_1 + \dots, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} &= \left(1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \dots \right) i_1 + \\ &+ \left(-\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} - \dots \right) i_2 = \text{ch}(\varphi) i_1 - \text{sh}(\varphi) i_2, \end{aligned} \quad (24)$$

а використання формули (7) при $\varphi = \pi/3$ і $n = 1000000$ приводить до значень

$$e^{\varphi i_2} = 1,600286419 i_1 - 1,249366708 i_2 \approx \text{ch} \varphi i_1 - \text{sh} \varphi i_2.$$

Таким чином, перехід від звичайних комплексних чисел до некомутативних, щодо їх подання у показниковій формі, відповідає переходу від експоненційної функції, що визначається гармонічними функціями (1), до експоненційної функції, яка визначається гіперболічними функціями (24). Множення уявних експоненційних функцій (24) визначається законами композиції (21) :

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} e^{\phi i_2} &= [\operatorname{ch}(\varphi) i_1 - \operatorname{sh}(\varphi) i_2] [\operatorname{ch}(\phi) i_1 - \operatorname{sh}(\phi) i_2] = \\ &= \operatorname{ch}(\varphi) i_1 \operatorname{ch}(\phi) i_1 + \operatorname{sh}(\varphi) i_2 \operatorname{sh}(\phi) i_2 - \\ &\quad \operatorname{ch}(\varphi) i_1 \operatorname{sh}(\phi) i_2 - \operatorname{sh}(\varphi) i_2 \operatorname{ch}(\phi) i_1 = \\ &= \operatorname{ch}(\varphi) \operatorname{ch}(\phi) i_1 - \operatorname{sh}(\varphi) \operatorname{sh}(\phi) i_1 - \\ &\quad - [\operatorname{sh}(\varphi) \operatorname{ch}(\phi) i_2 - \operatorname{ch}(\varphi) \operatorname{sh}(\phi) i_2] = \\ &= \operatorname{ch}(\varphi - \phi) i_1 - \operatorname{sh}(\varphi - \phi) i_2 = e^{(\varphi - \phi) i_2}. \end{aligned}$$

Як випливає з наведених виразів, при множенні зазначених експонент їх кути віднімаються, що призводить до некомутативності та неасоціативності множення, як і у разі множення уявних експоненційних функцій в рамках алгебри $\vec{D}$.

Некомутативні дуальні числа. Розглянемо алгебру $\vec{A}$ з законами композиції елементів $a = a_1 i_1 + a_2 i_2$

$$i_1 \cdot i_1 = i_1, \quad i_2 \cdot i_2 = 0, \quad i_1 \cdot i_2 = -i_2, \quad i_2 \cdot i_1 = i_2 \quad (25)$$

і визначимо її основні алгебраїчні властивості. Із співвідношень (25) випливає, що алгебру $\vec{A}$ можна розглядати як некомутативні дуальні числа.

Рівняння $a \cdot x = b$, або в алгебраїчній формі

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2) \cdot (x_1 i_1 + x_2 i_2) = b_1 i_1 + b_2 i_2,$$

якому відповідає система дійсних рівнянь

$$\begin{aligned} a_1 x_1 &= b_1, \\ a_2 x_1 - a_1 x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

має рішення

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad x_2 = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1^2}.$$

Рівнянню $y \cdot a = b$, або

$$(y_1 i_1 + y_2 i_2) \cdot (a_1 i_1 + a_2 i_2) = b_1 i_1 + b_2 i_2,$$

система дійсних рівнянь для якого має вигляд

$$\begin{aligned} y_1 a_1 &= b_1, \\ -y_1 a_2 + y_2 a_1 &= b_2, \end{aligned}$$

відповідає рішення

$$y_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad y_2 = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1^2}.$$

Зворотні елементи:

$$a_{r1}^{-1} = \frac{1}{a_1}, \quad a_{r2}^{-1} = \frac{a_2}{a_1^2}, \quad a_{l1}^{-1} = \frac{1}{a_1}, \quad a_{l2}^{-1} = \frac{a_2}{a_1^2}.$$

Нейтральні елементи:

$$e_{r1} = 1, \quad e_{r2} = 0, \quad e_{l1} = 1, \quad e_{l2} = \frac{2a_2}{a_1}.$$

З наведених виразів бачимо, що алгебра $\vec{A}$, як і алгебра дуальних чисел, не є алгеброю з діленням, тому що при $a_1 = 0$ не має зворотних елементів, що призводить до існування дільників нуля:

$$(a_2 i_2) \cdot (b_2 i_2) = 0.$$

Крім того, в алгебрі $\vec{A}$, як і в алгебрі дуальних чисел, є тільки правий одиничний елемент.

Розглянемо тепер уявну функцію $e^{\varphi i_2}$ в алгебрі $\vec{A}$. Оскільки в цьому випадку

$$i_2^2 = i_2 \cdot i_2 = 0, \quad i_2^3 = 0, \quad i_2^4 = 0, \quad i_2^5 = 0, \quad \dots,$$

то

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} &= i_1 + \frac{\varphi}{1!} i_1 i_2 + \frac{\varphi^2}{2!} i_1 i_2^2 + \frac{\varphi^3}{3!} i_1 i_2^3 + \\ &+ \frac{\varphi^4}{4!} i_1 i_2^4 + \frac{\varphi^5}{5!} i_1 i_2^5 \dots = i_1 - \varphi i_2, \end{aligned}$$

а застосувавши формулу (7) при $\varphi = \pi/3$ і $n = 1000000$, отримуємо значення

$$e^{\varphi i_2} = 1,000000000 i_1 - 1,0471975512 i_2 \approx 1 i_1 - \varphi i_2.$$

Добуток уявних експоненційних функцій в алгебрі $\bar{A}$ має вигляд

$$\begin{aligned} e^{\varphi i_2} e^{\phi i_2} &= (1i_1 - \varphi i_2)(1i_1 - \phi i_2) = \\ &= 1i_1 + (\phi - \varphi)i_2 = 1i_1 - (\varphi - \phi)i_2 = e^{(\varphi - \phi)i_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Із виразу (26) випливає, що при множенні уявних експонент в алгебрі $\bar{A}$ їх кути віднімаються. Це приводить до некомутативності та неасоціативності множення, як і при множенні експоненційних функцій у рамках алгебр $\bar{D}$ та $\bar{K}$.

Висновки

Перехід до некомутативності базисних елементів i_1, i_2 у законах композиції канонічних числових систем розмірності 2 приводить до зміни вигляду та математичних властивостей уявних експоненційних функцій, що використовуються для подання елементів зазначених числових систем. Зокрема кути зазначених експонент при множенні не додаються, а віднімаються, в результаті чого виникає їх некомутативність та неасоціативність.

Елементарні математичні функції можуть бути відтворені через некомутативні експоненційні функції, які використовуються для зображення елементів алгебри $\bar{D}$ -некомутативних подвійних чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Мир, 1984, 455 с.
2. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955, 744 с.
3. Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е. Высокоразмерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений. Киев: Инфодрук, 2012, 183 с.
4. Кліпков С.І. Узагальнений аналіз алгебр з діленням розмірності два // Електрон. моделювання, 2021, **43**, № 4, с. 5—21.

Отримано 16.11.21

REFERENCES

1. Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S. (1984), *Giperkompleksnyye chisla* [Hypercomplex numbers], Mir, Moscow, USSR.
2. Rozenfeld, B.A. (1955), *Neyevklidovy geometrii* [Non-euclidean geometries], GITTL, Moscow, USSR.
3. Kalinovskiy, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012), *Vysokorazmernyye izomorfnyye giperkompleksnyye chislovyye systemy i ikh ispolzovaniye dlya povysheniya effektivnosti vychisleniy* [High-dimensional isomorphic hypercomplex number systems and their use for efficiency increase of calculations], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
4. Klipkov, S.I. (2021), "Generalized Analysis of Division Algebras of Dimension 2", *Elektronne modelyuvannya*, Vol. 43, no. 4, pp. 5-21.

Received 16.11.21

S.I. Klipkov

SOME FEATURES OF IMAGINARY EXPONENTIAL
FUNCTIONS IN TWO-DIMENSIONAL NONCOMMUTATIVE,
NON-ASSOCIATIVE ALGEBRAIC SYSTEMS

Mathematical properties of imaginary exponential functions that can be used to represent the elements of two-dimensional algebraic systems constructed by introducing anticommutativity in the laws of composition of the elements of the basis of two-dimensional canonical numerical systems are considered.

K e y w o r d s: exponential functions, imaginary units, complex numbers, double numbers, dual numbers, algebraic systems.

КЛІПКОВ Сергій Іванович, канд. техн. наук, провідний інженер Приватного акціонерного товариства Національної енергетичної компанії «Укренерго». В 1974 р. закінчив Київський політехнічний інститут. Область наукових досліджень — електроенергетика, гіперкомплексні числові системи.