DOI: <https://doi.org/10.15407/emodel.43.06.050>
УДК 004.922, 004.923

Ю.М. Груць¹, д-р техн. наук, **П.О. Голотюк²**

¹ Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут» ім. Ігоря Сікорського
Україна, 03056, Київ, пр-т Перемоги, 37
e-mail: ygruts@gmail.com

² Компанія Draftkings
Україна, 04071, Київ, вул. Ярославська, 58
e-mail: pavelgolotuk@gmail.com

Стереоінтерполяція на основі косинусоїд

Розглянуто розвиток комп'ютерної процедури стереоінтерполювання, реалізованої на основі двох косинусоїд зі змінним періодом. Запропонована процедура призначена для створення та візуалізації 3D кривої, що проходить через три довільні точки простору стереобачення, вказані дослідником за допомогою стереокурсора. Розроблений метод дає можливість забезпечити режим, за якого дотична до кривої у середній точці завжди паралельна відрізку прямої, що з'єднує крайні точки. Дві косинусоїди гармонійно збігаються навколо середньої точки, і це справляє враження, що синтезована крива продовжується за рухом середньої точки.

К л ю ч о в і с л о в а: каркасні моделі, стереографіка, стереооператор, стереокурсор, стереоінтерполятор.

Електронне каркасне (скелетне, дротове) моделювання є одним з етапів 3D моделювання, а також важливим самостійним інструментарієм при використанні стереоскопічної форми подання просторової інформації [1, 2]. Розв'язок просторових задач забезпечує візуалізацію тривимірних зображень точково-скелетного вигляду і потребує виконання необхідних процедур каркасної стереопереробки.

До просторових задач можна віднести такі:

траєкторні — візуалізація результатів натурних іспитів, комп'ютерного чи напівтонового моделювання поведінки рухомих об'єктів у різноманітних середовищах (атмосфера, космос, підводне середовище); задачі локації;

польові — силові лінії поля (електромагнітного, радіаційного тощо);

© Груць Ю.М., Голотюк П.О., 2021

фізико-хімічні — тривимірні моделі атомних ядер, кристалічних решіток, органічних молекул;

контурні — ті, що потребують візуалізації контурів перетину тривимірних об'єктів площинами на різних рівнях по третій координаті (картографія, розділи технічної та медичної томографії, підготовка контурів для волюметричних систем);

задачі розподілу — розташування у просторі невеликих об'єктів порівняно з займаним об'ємом (моделі зіркового неба, домішок у розчинах та розплавах, карт підводних мінних полів тощо);

задачі навчання — стереометрія, нарисна геометрія, креслення, художнє проектування, дитяча творчість;

дизайн і проектування (як основа для подальшого доопрацювання проєкта засобами напівтонової графіки), архітектура, будівництво, машинобудування;

точково-скелетне копіювання реперних точок з натурних (фото) стереозображень;

натурно-комп'ютерне графічне стереомодельовання.

Каркасна модель повністю описується в термінах точок і ліній. Каркасні стереозображення на екрані подаються набором стереоточок і (або) стереовекторів.

Для розширення можливостей каркасного модельовання у традиційний набір маніпуляційних 3D процедур (зсув, поворот, масштабування, малювання) додано нові 3D процедури (стереорекурсія, стереовікно, стереointерполяція).

Для програми СТЕРЕО запропоновано і реалізовано процедуру стереointерполяції, суть якої полягає в наступному [3]. У передекранній або (і) заекранній зоні стереобачення за допомогою тривимірного стереокурсора обираємо дві довільні точки $1 (X_1, Y_1, Z_1)$ та $3 (X_3, Y_3, Z_3)$, де $OXYZ$ — світова система координат (рис. 1). У тому ж стереопросторі, обмеженому площинами, проведеними через точки 1 і 3 , перпендикулярно відрізка $1-3$ обираємо курсором довільну точку 2 .

Було поставлено задачу синтезувати безперервну інтерполяційну криву, що проходить через точки $1, 2, 3$. При цьому усі точки кривої мають лежати в одній площині і має бути виконана обов'язкова вимога, а саме кут нахилу дотичної у точці 2 повинен дорівнювати куту нахилу прямої $1-3$ до відповідної вісі координат. Вказану процедуру реалізовано на основі синтезу двох квадратичних парабол [4, 5].

Результати даного дослідження були спрямовані на подальший розвиток та вирішення цієї ж задачі, але на основі косинусоїд, що мають різний період, і на новій програмній платформі.

Виконання завдання розбиваємо на п'ять етапів.

Рис. 1. Розташування інтерполяційної кривої у просторі

Е т а п 1. Визначення напрямних косинусів нової системи координат.

Нова права система координат $0xyz$ (див. рис. 1) розташовується в такий спосіб: вісь $0x$ паралельна відрізку $1-3$; площина $x0y$ збігається з площиною Q , що проходить через точки $1, 2, 3$; початок координат 0 системи $0xyz$ збігається з точкою 4 , що утворюється в результаті перетину перпендикуляра з точки 2 на відрізок $1-3$.

Напрямні косинуси осі $0x$ (t_{11}, t_{21}, t_{31}) наступні:

$$t_{11} = \frac{(X_3 - X_1)}{d}, \quad t_{21} = \frac{(Y_3 - Y_1)}{d}, \quad t_{31} = \frac{(Z_3 - Z_1)}{d},$$

$$d = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2}.$$

Для визначення напрямних косинусів осі $0y$ (t_{12}, t_{22}, t_{32}) знайдемо координати точки 4 (X_4, Y_4, Z_4) в системі $0XYZ$:

$$X_4 = \frac{dX_1 + (1-d)(X_3 - X_1)}{d},$$

$$Y_4 = \frac{dY_1 + (1-d)(Y_3 - Y_1)}{d},$$

$$Z_4 = \frac{dZ_1 + (1-d)(Z_3 - Z_1)}{d}.$$

Знаючи координати точки 4 , запишемо співвідношення для напрямних косинусів осі $0y$:

$$t_{12} = \frac{(X_4 - X_2)}{2 - 4}, \quad t_{22} = \frac{(Y_4 - Y_2)}{2 - 4}, \quad t_{32} = \frac{(Z_4 - Z_2)}{2 - 4},$$

де

$$2 - 4 = \sqrt{(1-2)^2 - (1-4)^2}.$$

Немає необхідності визначати напрямні косинуси осі Oz (t_{13} , t_{23} , t_{33}), тому що координата z тотожно дорівнює нулю для всіх точок кривої за умовою побудови.

Е т а п 2. Визначення координат точок $1, 2, 3$ в новому базисі.

Для того щоб визначити координати точок $1, 2, 3$ у базисі $Oxyz$, скористаємося відомими формулами [6]:

точка 1 —

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}(X1 - X4) + t_{21}(Y1 - Y4) + t_{31}(Z1 - Z4) \\ y_1 = t_{12}(X1 - X4) + t_{22}(Y1 - Y4) + t_{32}(Z1 - Z4) \\ z_1 \equiv 0 \end{cases},$$

точка 2 —

$$\begin{cases} x_2 = t_{11}(X2 - X4) + t_{21}(Y2 - Y4) + t_{31}(Z2 - Z4) \\ y_2 = t_{12}(X2 - X4) + t_{22}(Y2 - Y4) + t_{32}(Z2 - Z4) \\ z_2 \equiv 0 \end{cases},$$

точка 3 —

$$\begin{cases} x_3 = t_{11}(X3 - X4) + t_{21}(Y3 - Y4) + t_{31}(Z3 - Z4) \\ y_3 = t_{12}(X3 - X4) + t_{22}(Y3 - Y4) + t_{32}(Z3 - Z4) \\ z_3 \equiv 0 \end{cases}.$$

Або у матричному вигляді:

точка 1 —

$$\mathfrak{X}1 = T(V1 - V4),$$

точка 2 —

$$\mathfrak{X}2 = T(V2 - V4),$$

точка 3 —

$$\mathfrak{X}3 = T(V3 - V4),$$

де T — матриця напрямних косинусів вісей координат системи $Oxyz$,

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix};$$

Рис. 2. Розташування косинусоїд відносно квадрантів I — IV

$V1, V2, V3, V4$ — вектори тривимірних координат точок $1, 2, 3, 4$ в світовій системі координат $0XVZ$,

$$V1 = \begin{pmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{pmatrix}, \quad V2 = \begin{pmatrix} X2 \\ Y2 \\ Z2 \end{pmatrix}, \quad V3 = \begin{pmatrix} X3 \\ Y3 \\ Z3 \end{pmatrix}, \quad V4 = \begin{pmatrix} X4 \\ Y4 \\ Z4 \end{pmatrix};$$

$\vartheta1, \vartheta2, \vartheta3$ — вектори точок $1, 2, 3$ в новому базисі,

$$\vartheta1 = \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta2 = \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vartheta3 = \begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Е т а п 3. Синтез інтерполяційної кривої.

Інтерполяційну криву пропонується шукати у вигляді двох косинусоїд: одної — для ділянки $2-1$ ($\cos-2$), другої — для ділянки $2-3$ ($\cos-1$). Залежно від взаємного розташування в просторі точок $1, 2, 3$ відповідні косинусоїди можуть розташовуватися в чотирьох квадрантах (рис. 2).

Крива $\cos-1$ може бути розташована або в квадранті I або в квадранті 4 , крива $\cos-2$ — або у квадранті 2 або у квадранті 3 . Косинусоїди 1 і 2 будуть розташовані відповідно в квадрантах I і II , якщо значення ординати (точка 2) — позитивне. Якщо це значення негативне, то $\cos-1$ і $\cos-2$ будуть розташовуватися відповідно в IV і III квадрантах.

У кожному квадранті зміна косинусів відбувається у діапазоні чверті періоду. Якщо відрізок $1-4$ дорівнює відрізку $3-4$, то, як видно на рис. 3, інтерполяційна крива становить половину періоду однієї косину-

Рис. 3. Приклад перерозподілу періодів косинусоїд

соїди. Якщо точка 2 зміщується вліво або вправо від середньої (2' або 2''), то між $\cos-1$ і $\cos-2$ відбувається перерозподіл значень їх періодів. Наприклад, для точки 2' — період кривої $\cos-1$ стає більшим за період кривої $\cos-2$.

Таким чином, змінюючи тривимірні координати точки 2, маємо можливість отримувати гладку криву, яка складається з двох косинусоїд, що задовольняє поставлену основну вимогу: кут нахилу дотичної в будь-якій з точок 2, 2', 2''... завжди дорівнює куту нахилу відрізка прямої 1—3.

Чверть періоду $\cos-1$ визначається величиною відрізка 3—4, а чверть періоду $\cos-2$ — величиною відрізка 1—4. Задаючи значення величини x , поступово обчислюємо складові косинусів кривої за такою формулою: значення відрізка 2—4 помножуємо на значення косинусів у відповідних квадрантах. В результаті отримуємо двовимірні значення безперервної кривої в базисі $0xyz$, розташованому в площині Q . Просторове розташування площини Q визначилося обраними просторовими точками 1, 2, 3.

Е т а п 4. Повернення до старого базису.

Щоб повернутися до початкової світової системи координат $0XYZ$, необхідно для всіх k пар чисел ділянки 1—2 та m пар чисел ділянки 2—3 виконати наступні процедури переходу:

$$V_1^i = T' \mathfrak{G}_1^i + V_2,$$

де $i = 0 - k$, k — ціле, $k > 0$;

$$V_3^j = T' \mathfrak{G}_3^j + V_2,$$

де $j = 0 - m$, де m — ціле, $m > 0$; T' — транспонована матриця T ; V_1^i — набір векторів тривимірних координат шуканої кривої, ділянки 1—2, у базисі $0XYZ$,

$$V_1^i = \begin{pmatrix} X_1^i \\ Y_1^i \\ Z_1^i \end{pmatrix};$$

V_3^j — набір векторів тривимірних координат шуканої кривої, ділянки 2—3, у базисі $0XYZ$,

$$V_3^j = \begin{pmatrix} X_3^j \\ Y_3^j \\ Z_3^j \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{V}_1^i$ — набір векторів координат кривої cos-2 системи $0xyz$, ділянка 1—2,

$$\mathfrak{V}_1^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ y_1^i \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{V}_3^j$ — набір векторів координат кривої cos-1 системи $0xyz$, ділянка 2—3,

$$\mathfrak{V}_3^j = \begin{pmatrix} x_3^j \\ y_3^j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розкривши матричні співвідношення, отримаємо

$$\begin{cases} X_1^i = t_{11}x_1^i + t_{12}y_1^i + X_2 \\ Y_1^i = t_{21}x_1^i + t_{22}y_1^i + Y_2 \\ Z_1^i = t_{31}x_1^i + t_{32}y_1^i + Z_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} X_3^j = t_{11}x_3^j + t_{12}y_3^j + X_2 \\ Y_3^j = t_{21}x_3^j + t_{22}y_3^j + Y_2 \\ Z_3^j = t_{31}x_3^j + t_{32}y_3^j + Z_2 \end{cases},$$

де $i = 0-k, j = 0-m$.

Отримані значення дискрет інтерполяційної кривої надходять до процедури стереоперетворення з метою подальшого виведення на екран у стереоскопічному вигляді.

Рис. 4. Приклади розташування стереointерполяційної кривої на екрані монітора: а — курсор зліва; б — курсор посередині; в — курсор справа; г — курсор за екраном; д — курсор перед екраном

Е т а п 5. Визначення точок стереointерполяції.

Для отримання точок стереointерполяції необхідно виконати процедуру стереоперетворення, а саме застосувати стереооператор постійного ракурсу $S_0\{\}$ [7] до всіх значень дискрет інтерполяційної кривої, найдених на етапі 4, тобто $S_0\{V_1^i\}_{i=0 \div k}$, $S_0\{V_3^j\}_{j=0 \div m}$.

Як відомо, застосування стереооператора $S_0\{\}$ до векторів V_1^i, V_3^j потребує реалізації наступних залежностей:

$$s_1^i = A(V_1^i + c) / (z_0^\vee - Z_1^i - \dot{z})|_{i=0 \div k},$$

$$s_3^j = A(V_3^j + c) / (z_0^\vee - Z_3^j - \dot{z})|_{j=0 \div m},$$

де s_1^i, s_3^j — вектори стереопар точок інтерполяційної кривої, визначені взаємним розташуванням системи координат $0XYZ$ і екранною системою

координат. Компоненти матриці A обумовлені обраним базисом комп'ютерного стереобачення $2a$ та тривимірними координатами точки розташування постійного стереоракурсу $\check{x}_0, \check{y}_0, \check{z}_0$:

$$c = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \check{z}_0 & 0 & a - \check{x}_0 \\ -\check{z}_0 & 0 & -a - \check{x}_0 \\ 0 & -\check{z}_0 & -\check{y}_0 \end{pmatrix}.$$

Отримані в результаті перетворень стереопари всіх точок інтерполяційної кривої надходять до апаратного або програмного блоку синтезу стереовекторів для реалізації методу кусково-лінійної апроксимації та подальшої стереовізуалізації.

На рис. 4 наведено приклади різного розташування стереоінтерполяційної 3D кривої на екрані монітора. На рис. 4, а, б, в, крива розташована в площині екрана. На рис. 4, г, крайні та середня точки розташовані на поверхні екрана, а курсор, що вказує на середню точку, перебуває за екраном. На рис. 4, д, середня і одна з крайніх точок розташовані перед екраном, а інша крайня точка — за екраном. Візуалізація при демонстрації даної процедури здійснювалася з використанням анагліфічного методу сепарації стереопар (червоний колір відповідає лівому оку спостерігача, бірюзовий колір — правому оку).

Висновки

Запропонований метод синтезу стереоінтерполяційної кривої на основі двох косинусоїд із змінним періодом реалізовано у програмній системі, розробленій на основі C++17 (VC redist 2019) з використанням бібліотек ImGui, OpenGL 4.2, GLM.

Як показали експериментальні дослідження, всі вимоги до цієї процедури було виконано. Дослідник отримав можливість у просторі стереобачення (у передекранному та (або) заекранному) за допомогою тривимірного стереопоказчика обрати три довільних точки, і процедура давала йому можливість переміщаючи середню або одну з крайніх точок створювати в реальному часі безперервну інтерполяційну стереокриву, з можливістю адекватного сприйняття розташування синтезованої кривої у просторі. При цьому екстремум завжди знаходився в середній точці стереокривої.

Процедура стереоінтерполяції призначена для забезпечення режиму швидкої тривимірної оцифровки і (або) скелетизації натурних стереозоб-

ражень зі складними нелінійними поверхнями, які погано піддаються математичному опису. Така процедура ефективна при синтезі оптимальних тривимірних кривих і поверхонь, поданих в стереоскопічному вигляді при натурно-комп'ютерному стереомодельованні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Роджерс Л., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Машиностроение, 1980, 240с.
2. Груц Ю.Н. Стереоскопическая машинная графика. Киев: Наук. думка, 1989, 160 с. ISBN 5-12-001188-8.
3. Евдокимов В.Ф., Груц Ю.Н. Графический стереоредактор для работы с трехмерными объектами скелетного типа // Збірник наукових праць ІПМЕ НАН України, 2003, **20**, с. 105—112.
4. Gruts Y.N. Stereointerpolation Procedure // Engineering Simulation, 1999, Vol. 17, pp. 117—125.
5. Яровой Р.В., Груц Ю.Н. Алгоритм повышения точности синтеза интерполяционной кривой // Электрон. моделирование, 2010, **32**, №5, с. 105—111.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1968, с. 55—56.
7. Gruts Y.N., Jung-Young Son, Donghoon Kong. Stereoscopic operators and their Application // Journal of Optical Society of Korea, 2001, Vol. 5, No. 3, pp. 90—92.

Отримано 28.10.21

REFERENCES

1. Rogers, L. and Adams, J. (1980), *Matematicheskiye osnovy mashinnoy grafiki* [Mathematical foundations of machine graphics], Mashinostroyeniye, Moscow, USSR.
2. Gruts, Yu.N. (1989), *Stereoskopicheskaya mashinnaya grafika* [Stereoscopic computer graphics], Naukova Dumka, Kyiv, USSR, ISBN 5-12-001188-8.
3. Evdokimov, V.F. and Gruts, Yu.N. (2003), "Graphic stereo editor for working with three-dimensional objects of skeletal type", *IPME NAN Ukrayiny. Zbirnyk naukovykh prats*, Vol. 20, pp. 105—112.
4. Gruts, Y.N. (1999), "Stereointerpolation Procedure", *Engineering Simulation*, Vol. 17, pp. 117-125.
5. Yarovoy, R.V. and Gruts, Yu.N. (2010), "Algorithm for increasing the accuracy of the interpolation curve synthesis", *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 32, no. 5, pp. 105-111.
6. Korn, G. and Korn, T. (1968), *Spravochnik po matematike* [Handbook of mathematics], Nauka, Moscow, USSR.
7. Gruts, Y.N., Jung-Young, Son and Donghoon, Kong (2001), "Stereoscopic operators and their Application", *Journal of Optical Society of Korea*, Vol. 5, no. 3, pp. 90-92.

Received 28.10.21

Y.N. Gruts, P.O. Holotiuk

COSINE BASED STEREOINTERPOLATION

Considered the future development of the computer procedure for stereo interpolation, implemented on the basis of two cosine waves with a variable period. The proposed procedure is designed to create and visualize a 3D curve passing through three arbitrary points in the stereo vision space, specified by the researcher using a stereo cursor. The feature of this method is the implemented mode in which the tangent drawn to the curve at the midpoint is always parallel

to the line segment connecting the end points. The two cosine waves merge harmoniously around the midpoint, and this gives the researcher the feeling that the synthesized curve stretches for the midpoint as it moves.

Keywords: wireframe models, stereography, stereo operator, stereo indicator, stereointerpolator.

ГРУЦЬ Юрій Миколайович, д-р техн. наук, ст. наук. співробітник, професор кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів та систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського». В 1967 р. закінчив Київський політехнічний інститут. Область наукових досліджень — теорія комп'ютерного стереомодельовання.

ГОЛОТЮК Павло Олександрович, розробник компанії Draftkings. В 2020 р. закінчив Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського». Область наукових досліджень — каркасні стереозображення.